2 पायथागोरसचे प्रमेय

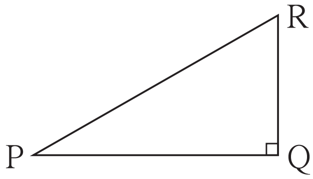
चला, शिकूया.

- पायथागोरसचे त्रिकुट
- भूमितीमध्याचे प्रमेय
- पायथागोरसच्या प्रमेयाचे उपयोजन
- समरूपता आणि काटकोन त्रिकोण
- पायथागोरसचे प्रमेय
- अपोलोनियसचे प्रमेय

जरा आठवूया.

पायथागोरसचे प्रमेय :

काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.



आकृती 2.1

Δ PQR मध्ये $\angle$ PQR = 90°

$l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$

हेच आपण $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ असे लिहू.

Δ PQR च्या PQ, QR व PR या बाजूंच्या लांबी अनुक्रमे r, p आणि q या अक्षरांनी दाखविण्याचाही संकेत आहे. त्यानुसार, आकृती 2.1 च्या संदर्भात पायथागोरसचे प्रमेय $q^2 = p^2 + r^2$ असेही लिहिता येईल.

पायथागोरसचे त्रिकुट :

नैसर्गिक संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये जर एका संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असेल तर त्याला पायथागोरसचे त्रिकुट म्हणतात.

उदाहरणार्थ :(11, 60, 61) या संख्यांच्या त्रिकुटामध्ये,

$11^2 = 121$, $60^2 = 3600$, $61^2 = 3721$ आणि $121 + 3600 = 3721$

या ठिकाणी मोठ्या संख्येचा वर्ग हा इतर दोन संख्यांच्या वर्गांच्या बेरजेइतका आहे.

$\therefore$ 11, 60, 61 हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे.

तसेच (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (24, 25, 7) ही देखील पायथागोरसची त्रिकुटे आहेत, हे पडताळा.

पायथागोरसच्या त्रिकुटांतील संख्या कोणत्याही क्रमाने लिहिता येतात.

अधिक माहितीसाठी :

पायथागोरसची त्रिकुटे मिळवण्याचे सूत्र :

जर a, b, c या नैसर्गिक संख्या असतील आणि $a > b$, तर $[(a^2 + b^2),(a^2 - b^2),(2ab)]$ हे पायथागोरसचे त्रिकुट असते.

$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ .... (I)

$(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ .... (II)

$(2ab)^2 = 4a^2b^2$ .... (III)

$\therefore$ (I), (II) व (III) वरून, $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$

$\therefore [(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), (2ab)]$ हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे.

हे त्रिकुट, पायथागोरसची वेगवेगळी त्रिकुटे मिळवण्यासाठी सूत्र म्हणून वापरता येते.

उदाहरणार्थ, $a = 5$ आणि $b = 3$ घेतल्यास,

$a^2 + b^2 = 34$, $a^2 - b^2 = 16$ आणि $2ab = 30$.

(34, 16, 30) हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे, हे तुम्ही पडताळून पाहा.

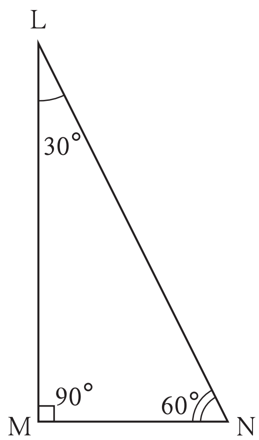
a आणि b साठी विविध नैसर्गिक संख्या घेऊन सूत्राच्या आधारे पायथागोरसची 5 त्रिकुटे तयार करा.

मागील इयत्तेत आपण **30°– 60°– 90°** आणि **45°– 45°– 90°** हे कोन असणाऱ्या काटकोन त्रिकोणांचे गुणधर्म पाहिले आहेत.

(I) कोनांची मापे 30°–60°–90° असणाऱ्या त्रिकोणाचा गुणधर्म

काटकोन त्रिकोणाचे लघुकोन 30° व 60° असतील, तर 30° मापाच्या कोनासमोरील बाजू कर्णाच्या निम्मी असते व 60° मापाच्या कोनासमोरील बाजू कर्णाच्या $\frac{\sqrt{3}}{2}$ पट असते.

आकृती 2.2 पाहा. Δ LMN मध्ये, $\angle L = 30°$, $\angle N = 60°$, $\angle M = 90°$



आकृती 2.2

$\therefore$ 30° कोनासमोरील बाजू = MN = $\frac{1}{2} \times LN$

60° कोनासमोरील बाजू = LM = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times LN$

जर LN = 6 सेमी तर MN व LM काढू.

$MN = \frac{1}{2} \times LN$

$= \frac{1}{2} \times 6$

= 3 सेमी

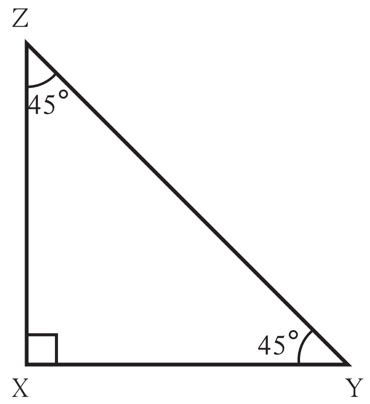
$LM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times LN$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$

$= 3\sqrt{3}$ सेमी

(II) कोनांची मापे $45°-45°-90°$ असणाऱ्या त्रिकोणाचा गुणधर्म

काटकोन त्रिकोणाचे लघुकोन $45°$ व $45°$ मापाचे असतील तर काटकोन करणारी प्रत्येक बाजू ही कर्णाच्या $\frac{1}{\sqrt{2}}$ पट असते .



आकृती 2.3

आकृती 2.3 पाहा. Δ XYZ मध्ये,

$$XY = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

$$XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

जर $ZY = 3\sqrt{2}$ सेमी तर XY आणि XZ काढू.

$$XY = XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$$

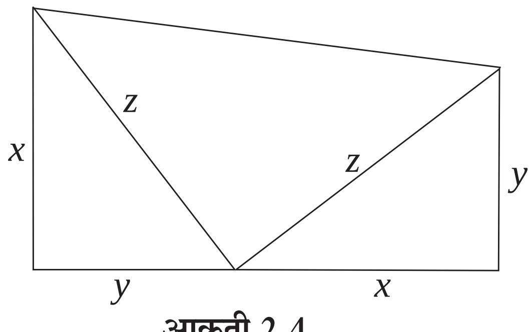
$$\therefore \; XY = XZ = 3 \text{ सेमी}$$

पायथागोरसचे प्रमेय इयत्ता 7 वी मध्ये क्षेत्रफळाच्या सहाय्याने अभ्यासले आहे. त्यामध्ये आपण चार काटकोन त्रिकोण व एक चौरस यांच्या क्षेत्रफळांचा उपयोग केला होता. याच प्रमेयाची सिद्‌धता आपण थोड्या वेगळ्या प्रकारेही देऊ शकतो.

कृती :

आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे दोन एकरूप काटकोन त्रिकोण घ्या. त्यांच्या कर्णांच्या लांबीएवढ्या दोन भुजा असलेला एक समद्‌विभुज काटकोन त्रिकोण घ्या. हे तीन काटकोन त्रिकोण जोडून समलंब चौकोन तयार करा.

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × (समांतर बाजूंच्या लांबीची बेरीज) × उंची ; या सूत्राचा उपयोग करून त्याचे क्षेत्रफळ तिन्ही त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांच्या बेरजेबरोबर लिहून पायथागोरसचे प्रमेय सिद्‌ध करा.



आकृती 2.4

जाणून घेऊया.

आता आपण पायथागोरसच्या प्रमेयाची सिद्धता समरूप त्रिकोणांच्या आधारे देणार आहोत.

ही सिद्धता देण्यासाठी आवश्यक असणारे काटकोन त्रिकोणाचे समरूपतेसंबंधीचे गुणधर्म अभ्यासू.

समरूपता आणि काटकोन त्रिकोण (Similarity and right angled triangle)

प्रमेय : **काटकोन त्रिकोणात कर्णावर टाकलेल्या शिरोलंबामुळे जे त्रिकोण तयार होतात ते मूळ काटकोन त्रिकोणाशी व परस्परांशी समरूप असतात.**

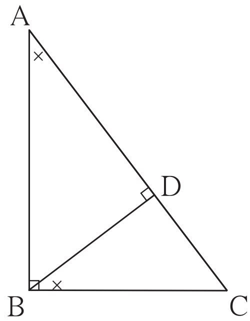
पक्ष : Δ ABC मध्ये $\angle ABC = 90°$,

रेख BD $\perp$ रेख AC, A-D-C

साध्य : $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$

$\Delta ADB \sim \Delta BDC$



आकृती 2.5

सिद्धता : Δ ADB आणि Δ ABC मध्ये

$\angle DAB \cong \angle BAC$ ...(सामाईक कोन)

$\angle ADB \cong \angle ABC$ ...(90° कोन)

$\Delta ADB \sim \Delta ABC$ ...(को को कसोटी)...(I)

तसेच, Δ BDC आणि Δ ABC मध्ये

$\angle BCD \cong \angle ACB$ ...(सामाईक कोन)

$\angle BDC \cong \angle ABC$ ...(90° कोन)

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$ ...(को को कसोटी)..(II)

$\therefore \Delta ADB \sim \Delta BDC$ विधान (I) व (II) वरून ...(III)

$\therefore \Delta ADB \sim \Delta BDC \sim \Delta ABC$ विधान (I), (II) व (III) वरून..... संक्रामकता

भूमितीमध्याचे प्रमेय (Theorem of geometric mean)

काटकोन त्रिकोणात, कर्णावर काढलेला शिरोलंब, त्या शिरोलंबामुळे होणाऱ्या कर्णाच्या दोन भागांचा भूमितीमध्य असतो.

सिद्धता : काटकोन त्रिकोण PQR मध्ये रेख QS $\perp$ कर्ण PR

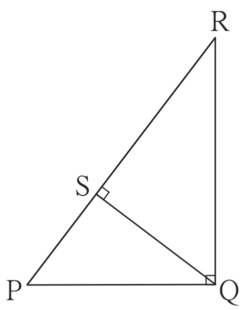
$\Delta QSR \sim \Delta PSQ$ .... (काटकोन त्रिकोणांची समरूपता)

$$\therefore \quad \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{SQ}$$

$$\therefore \quad \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{QS}$$

$$QS^2 = PS \times SR$$

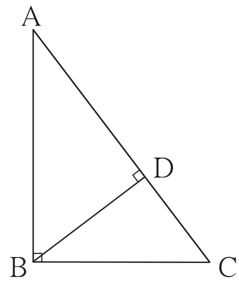
$\therefore$ शिरोलंब QS हा रेख PS आणि रेख SR यांचा 'भूमितीमध्य' आहे.



आकृती 2.6

पायथागोरसचे प्रमेय (Theorem of Pythagoras)

काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.



पक्ष : Δ ABC मध्ये, $\angle ABC = 90^\circ$

साध्य : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : बिंदू B मधून बाजू AC वर रेख BD लंब काढला. A-D-C

सिद्धता : काटकोन Δ ABC मध्ये रेख BD $\perp$ कर्ण AC ..... (रचना)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC$ ..... (काटकोन त्रिकोणाची समरूपता) **आकृती 2.7**

$\Delta ABC \sim \Delta ADB$

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB}$ – संगतभुजा

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$

$AB^2 = AD \times AC$ .... (I)

तसेच, $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ – संगतभुजा

$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$

$BC^2 = DC \times AC$ .... (II)

(I) व (II) यांची बेरीज करून

$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$

$= AC\,(AD + DC)$

$= AC \times AC$ .... (A-D-C)

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$

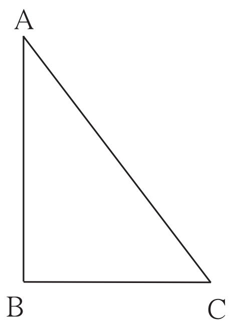
$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

पायथागोरसच्या प्रमेयाचा व्यत्यास (Converse of Pythagoras' theorem)

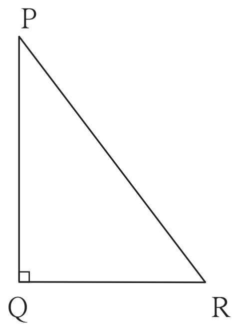
एखाद्या त्रिकोणातील एका बाजूचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असेल, तर तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असतो.

पक्ष : Δ ABC मध्ये, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

साध्य : $\angle ABC = 90^\circ$



आकृती 2.8



आकृती 2.9

रचना : Δ PQR असा काढा की, AB = PQ, BC = QR , $\angle$ PQR = 90°.

सिद्धता : Δ PQR मध्ये, $\angle$ Q = 90°

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ .... (पायथागोरसच्या प्रमेयावरून)

$= AB^2 + BC^2$ .... (रचना)

$= AC^2$ .... (पक्ष)

$\therefore PR^2 = AC^2$,

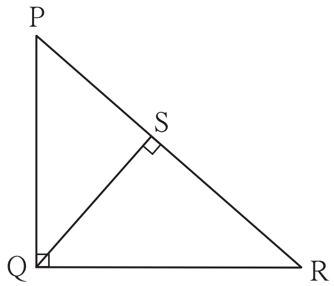
$\therefore PR = AC$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ .... (बाबाबा कसोटी)

$\therefore \angle ABC = \angle PQR = 90°$

हे लक्षात ठेवूया.

(1) (a) समरूपता आणि काटकोन त्रिकोण



आकृती 2.10

Δ PQR मध्ये $\angle$ Q = 90° , रेख QS $\perp$ रेख PR येथे $\Delta PQR \sim \Delta PSQ \sim \Delta QSR$ अशा रीतीने आकृतीमध्ये तयार होणारे सर्व काटकोन त्रिकोण परस्परांशी समरूप असतात.

(b) भूमितीमध्याचे प्रमेय :

वरील आकृतीत $\Delta PSQ \sim \Delta QSR$

$\therefore QS^2 = PS \times SR$

$\therefore$ रेख QS हा रेख PS व रेख SR या रेषाखंडाचा भूमितीमध्य आहे.

(2) पायथागोरसचे प्रमेय :

काटकोन त्रिकोणात कर्णाचा वर्ग हा इतर दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असतो.

(3) पायथागोरसच्या प्रमेयाचा व्यत्यास :

एखाद्या त्रिकोणातील एका बाजूचा वर्ग हा त्या त्रिकोणाच्या उरलेल्या दोन बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेइतका असेल तर तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असतो.

याशिवाय आणखी एक गुणधर्म खूप उपयोगी आहे. तोही लक्षात ठेवूया.

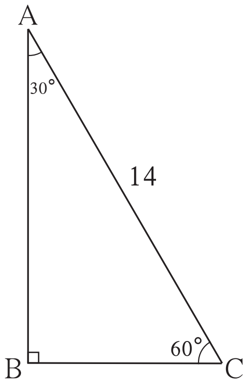
(4) काटकोन त्रिकोणात एक बाजू कर्णाच्या निम्मी असेल तर त्या बाजूच्या समोरील कोन 30° असतो.

हा गुणधर्म 30°-60°-90° प्रमेयाचा व्यत्यास आहे.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) आकृती 2.11 पाहा. Δ ABC मध्ये $\angle B = 90°$, $\angle A = 30°$, AC=14 तर AB व BC काढा.

उकल :



आकृती 2.11

Δ ABC मध्ये,

$\angle B = 90°$, $\angle A = 30°$, $\therefore \angle C = 60°$

30° - 60° - 90° च्या प्रमेयानुसार,

$BC = \frac{1}{2} \times AC$

$BC = \frac{1}{2} \times 14$

$BC = 7$

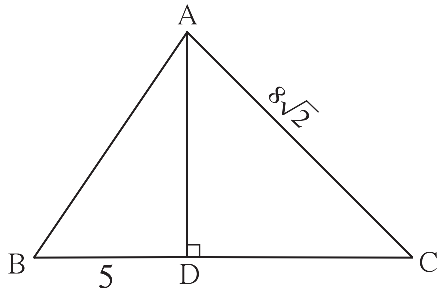
$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC$

$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14$

$AB = 7\sqrt{3}$

उदा. (2) आकृती 2.12 पाहा. Δ ABC मध्ये रेख AD $\perp$ रेख BC, $\angle C = 45°$, BD = 5 आणि AC = $8\sqrt{2}$, तर AD आणि BC काढा.

उकल :



आकृती 2.12

Δ ADC मध्ये,

$\angle ADC = 90°$, $\angle C = 45°$, $\therefore \angle DAC = 45°$

$AD = DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2}$ ... (45°-45°-90° च्या प्रमेयानुसार)

$\therefore DC = 8 \quad \therefore AD = 8$

BC = BD + DC

= 5 + 8

= 13

उदा. (3) आकृती 2.13 मध्ये $\angle PQR = 90°$, रेख QN $\perp$ रेख PR, PN = 9, NR = 16 तर QN काढा.

उकल : Δ PQR मध्ये, रेख QN $\perp$ रेख PR

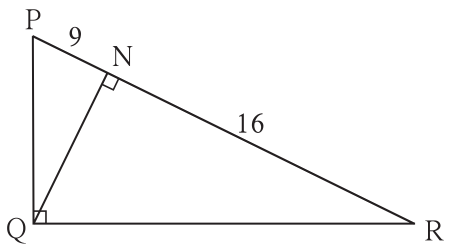
$\therefore QN^2 = PN \times NR$ .... (भूमितीमध्याचे प्रमेय)

$\therefore QN = \sqrt{PN \times NR}$

$= \sqrt{9 \times 16}$

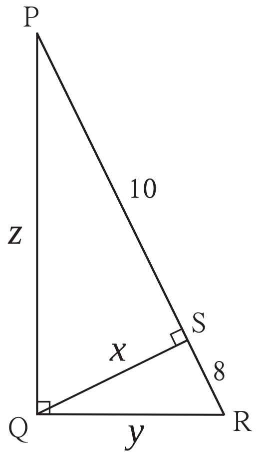
$= 3 \times 4$

$= 12$



आकृती 2.13

उदा. (4) आकृती 2.14 पाहा. Δ PQR मध्ये $\angle$ PQR = 90°, रेख QS $\perp$ रेख PR तर x, y, z च्या किमती काढा.



आकृती 2.14

उकल : Δ PQR मध्ये, $\angle$ PQR = 90°, रेख QS $\perp$ रेख PR

$QS = \sqrt{PS \times SR}$ .... (भूमितीमध्याचे प्रमेय)

$= \sqrt{10 \times 8}$

$= \sqrt{5 \times 2 \times 8}$

$= \sqrt{5 \times 16}$

$= 4\sqrt{5}$

$\therefore \; x = 4\sqrt{5}$

Δ QSR मध्ये, $\angle$ QSR = 90°

$\therefore \; QR^2 = QS^2 + SR^2$

$= (4\sqrt{5})^2 + 8^2$

$= 16 \times 5 + 64$

$= 80 + 64$

$= 144$

$\therefore \; QR = 12$

Δ PSQ मध्ये, $\angle$ QSP = 90°

$\therefore \; PQ^2 = QS^2 + PS^2$

$= (4\sqrt{5})^2 + 10^2$

$= 16 \times 5 + 100$

$= 80 + 100$

$= 180$

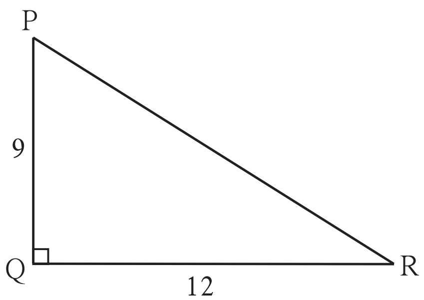
$= 36 \times 5$

$\therefore \; PQ = 6\sqrt{5}$

यावरून, $x = 4\sqrt{5}$, $y = 12$, $z = 6\sqrt{5}$

उदा. (5) काटकोन त्रिकोणात काटकोन करणाऱ्या बाजू 9 सेमी व 12 सेमी आहेत तर त्या त्रिकोणाचा कर्ण काढा.

उकल : Δ PQR मध्ये, $\angle$ Q = 90°



आकृती 2.15

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार)

$= 9^2 + 12^2$

$= 81 + 144$

$\therefore \; PR^2 = 225$

$\therefore \; PR = 15$

त्रिकोणाचा कर्ण = 15 सेमी

उदा. (6) Δ LMN मध्ये $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$ तर Δ LMN हा काटकोन त्रिकोण आहे किंवा नाही ते ठरवा. (l, m, n, या अनुक्रमे $\angle L$, $\angle M$ आणि $\angle N$ यांच्या समोरील बाजू आहेत.)

उकल : $l = 5, \quad m = 13, \quad n = 12$

$l^2 = 25, \quad m^2 = 169, \quad n^2 = 144$

$\therefore\ m^2 = l^2 + n^2$

$\therefore$ पायथागोरसच्या प्रमेयाच्या व्यत्यासानुसार Δ LMN हा काटकोन त्रिकोण आहे.

उदा. (7) आकृती 2.16 पाहा. Δ ABC मध्ये, रेख AD $\perp$ रेख BC, तर सिद्ध करा :

$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$

उकल : पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार Δ ADC मध्ये,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$\therefore\ AD^2 = AC^2 - CD^2$ ... (I)

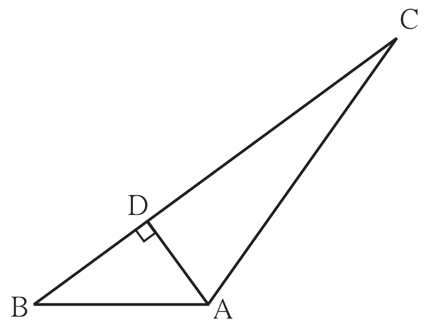
Δ ADB मध्ये,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$\therefore\ AD^2 = AB^2 - BD^2$ ... (II)

$\therefore\ AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ .... [(I) आणि (II) वरून]

$\therefore\ AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$



आकृती 2.16

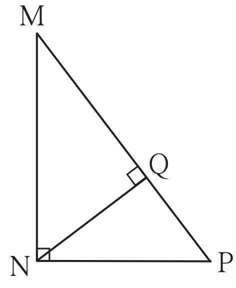
सरावसंच 2.1

1. खालील त्रिकुटांपैकी पायथागोरसची त्रिकुटे कोणती आहेत हे सकारण लिहा.

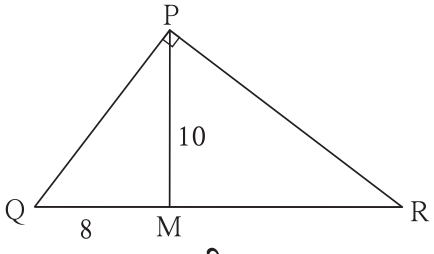
   (1) (3, 5, 4) (2) (4, 9, 12) (3) (5, 12, 13)

   (4) (24, 70, 74) (5) (10, 24, 27) (6) (11, 60, 61)

2. आकृती 2.17 मध्ये $\angle MNP = 90^\circ$, रेख NQ $\perp$ रेख MP, MQ = 9, QP = 4 तर NQ काढा.



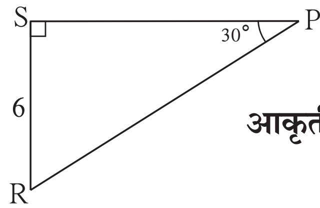
आकृती 2.17



आकृती 2.18

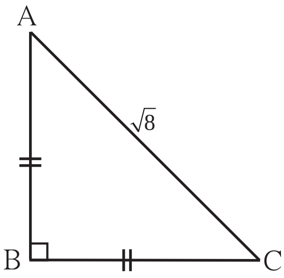
3. आकृती 2.18 मध्ये $\angle QPR = 90^\circ$, रेख PM $\perp$ रेख QR आणि Q-M-R, PM = 10, QM = 8 यावरून QR काढा.

4. आकृती 2.19 मधील Δ PSR मध्ये दिलेल्या माहितीवरून RP आणि PS काढा.



आकृती 2.19

5. आकृती 2.20 मध्ये दिलेल्या माहितीवरून AB आणि BC काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.



आकृती 2.20

AB = BC .... ☐

$\therefore$ $\angle$ BAC = ☐

$\therefore$ AB = BC = ☐ $\times$ AC

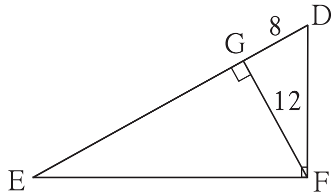
= ☐ $\times \sqrt{8}$

= ☐ $\times 2\sqrt{2}$

= ☐

6. एका चौरसाचा कर्ण 10 सेमी आहे तर त्याच्या बाजूची लांबी व परिमिती काढा.

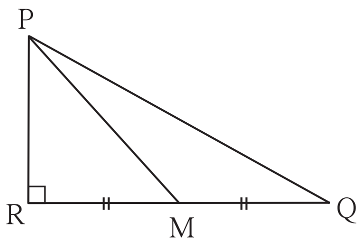
7. आकृती 2.21 मध्ये $\angle$ DFE = 90°, रेख FG $\perp$ रेख ED. जर GD = 8, FG = 12, तर (1) EG (2) FD आणि (3) EF काढा.



आकृती 2.21

8. एका आयताची लांबी 35 सेमी व रुंदी 12 सेमी आहे तर त्या आयताच्या कर्णाची लांबी काढा.

9*. आकृती 2.22 मध्ये M हा बाजू QR चा मध्यबिंदू आहे. $\angle$ PRQ = 90° असेल तर सिद्ध करा, $PQ^2 = 4PM^2 - 3PR^2$



आकृती 2.22

10*. रस्त्याच्या दुतर्फा असलेल्या इमारतीच्या भिंती एकमेकींना समांतर आहेत. 5.8 मी लांबीच्या शिडीचे एक टोक रस्त्यावर ठेवले असता तिचे वरचे टोक पहिल्या इमारतीच्या 4 मीटर उंच असलेल्या खिडकीपर्यंत टेकते. त्याच ठिकाणी शिडी ठेवून रस्त्याच्या दुसऱ्या बाजूस वळविल्यास तिचे वरचे टोक दुसऱ्या इमारतीच्या 4.2 मीटर उंच असलेल्या खिडकीपर्यंत येते, तर रस्त्याची रुंदी काढा.

जाणून घेऊया.

पायथागोरसच्या प्रमेयाचे उपयोजन

पायथागोरसच्या प्रमेयामध्ये काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण आणि काटकोन करणाऱ्या बाजू यांचा परस्पर संबंध म्हणजेच काटकोनासमोरील बाजू आणि इतर दोन बाजूंमधील संबंध सांगितला आहे.

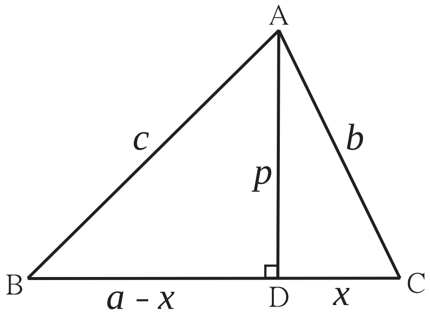
त्रिकोणातील लघुकोनासमोरील बाजूचा इतर दोन बाजूंशी असलेला संबंध तसेच विशालकोनासमोरील बाजूंचा इतर दोन बाजूंशी असलेला संबंध पायथागोरसच्या प्रमेयाने ठरविता येतो.हे संबंध खालील उदाहरणांतून समजून घ्या.

उदा.(1) Δ ABC मध्ये, $\angle$ C हा लघुकोन आहे, रेख AD $\perp$ रेख BC तर सिद्ध करा :

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

दिलेल्या आकृतीमध्ये, $AB = c$, $AC = b$, $AD = p$, $BC = a$, $DC = x$ मानू.

$\therefore BD = a - x$



आकृती 2.23

Δ ADB मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार

$c^2 = (a-x)^2 + \square$

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \square$ .... (I)

Δ ADC मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार

$b^2 = p^2 + \square$

$p^2 = b^2 - \square$ .... (II)

(II) मधील p^2 ची किंमत, (I) मध्ये ठेवून,

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$

$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

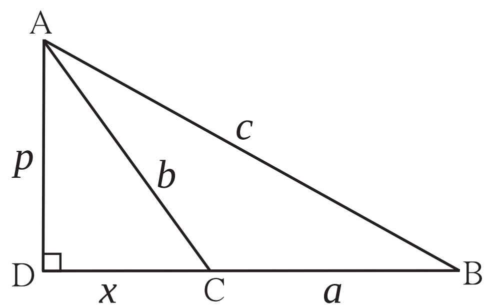
उदा.(2) Δ ABC मध्ये, $\angle$ ACB हा विशालकोन आहे, रेख AD $\perp$ रेख BC, तर सिद्ध करा :

$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

समजा $AD = p$, $AC = b$, $AB = c$,

$BC = a$, $DC = x$ मानू.

$DB = a + x$



आकृती 2.24

Δ ADB मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$c^2 = (a + x)^2 + p^2$

$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + p^2$ .... (I)

तसेच Δ ADC मध्ये,

$$b^2 = x^2 + p^2$$

$$\therefore \quad p^2 = b^2 - x^2 \qquad \text{..........} \ (II)$$

$\therefore$ (I) मध्ये (II) मधील p^2 ची किंमत घालून,

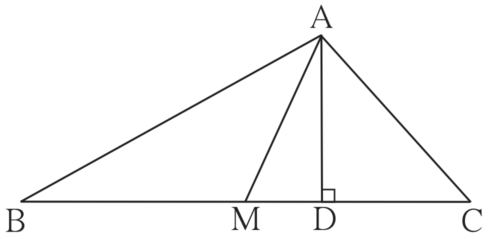
$$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$= a^2 + 2ax + b^2$$

$\therefore$ $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

अपोलोनियसचे प्रमेय (Appollonius' Theorem)

Δ ABC मध्ये, बिंदू M हा बाजू BC चा मध्यबिंदू असेल, तर $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$



आकृती 2.25

पक्ष : Δ ABC मध्ये M हा बाजू BC चा मध्यबिंदू आहे.

साध्य : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

रचना : रेख AD $\perp$ रेख BC काढला.

सिद्धता : जर रेख AM हा रेख BC ला लंब नसेल, तर $\angle$ AMB आणि $\angle$ AMC यांपैकी एक विशालकोन आणि दुसरा लघुकोन असतो.

आकृतीमध्ये $\angle$ AMB विशालकोन आणि $\angle$ AMC हा लघुकोन आहे.

वरील उदाहरण (1) व उदाहरण (2) वरून,

$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \times MD$ ..... (I)

आणि $AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \times MD$

$\therefore$ $AC^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM \times MD$ ($\because$ BM = MC) ....(II)

$\therefore$ (I) व (II) यांची बेरीज करून,

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

जर रेख AM $\perp$ बाजू BC तर या प्रमेयाची सिद्धता तुम्ही लिहा.

या उदाहरणावरून त्रिकोणाच्या बाजू आणि मध्यगा यांचा परस्परसंबंध समजतो.

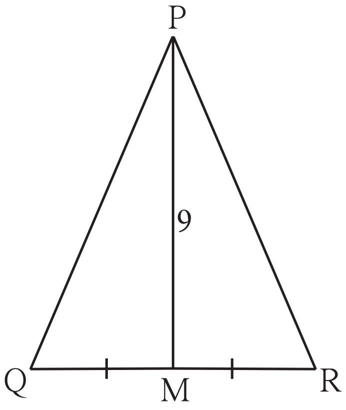
यालाच 'अपोलोनियसचे प्रमेय' म्हणतात.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा.(1) Δ PQR मध्ये, रेख PM ही मध्यगा आहे. PM = 9 आणि $PQ^2 + PR^2 = 290$, तर QR काढा.

उकल : Δ PQR मध्ये, रेख PM ही मध्यगा आहे.

M हा रेख QR चा मध्यबिंदू आहे.



आकृती 2.26

$QM = MR = \frac{1}{2} QR$

$PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2$ (अपोलोनियसच्या प्रमेयानुसार)

$290 = 2 \times 9^2 + 2QM^2$

$290 = 2 \times 81 + 2QM^2$

$290 = 162 + 2QM^2$

$2QM^2 = 290 - 162$

$2QM^2 = 128$

$QM^2 = 64$

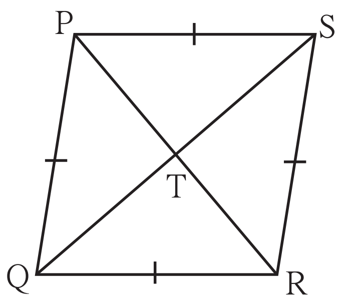
$QM = 8$

$\therefore \quad QR = 2 \times QM$

$= 2 \times 8$

$= 16$

उदा.(2) समभुज चौकोनाच्या बाजूंच्या वर्गांची बेरीज त्याच्या कर्णांच्या वर्गांच्या बेरजेइतकी असते, हे सिद्ध करा.



आकृती 2.27

पक्ष : □ PQRS हा समभुज चौकोन असून कर्ण PR आणि SQ एकमेकांना T या बिंदूत छेदतात.

साध्य : $PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = PR^2 + QS^2$

सिद्धता : समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

$\therefore$ अपोलोनियसच्या प्रमेयानुसार,

$PQ^2 + PS^2 = 2PT^2 + 2QT^2$ .... (I)

$QR^2 + SR^2 = 2RT^2 + 2QT^2$ .... (II)

$\therefore$ (I) व (II) यांची बेरीज करून,

$PQ^2 + PS^2 + QR^2 + SR^2 = 2(PT^2 + RT^2) + 4QT^2$

$\therefore PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = 2(PT^2 + PT^2) + 4QT^2$ .... $(RT = PT)$

$= 4PT^2 + 4QT^2$

$= (2PT)^2 + (2QT)^2$

$= PR^2 + QS^2$

(हे उदाहरण पायथागोरसच्या प्रमेयाचा उपयोग करूनही सोडविता येईल.)

सरावसंच 2.2

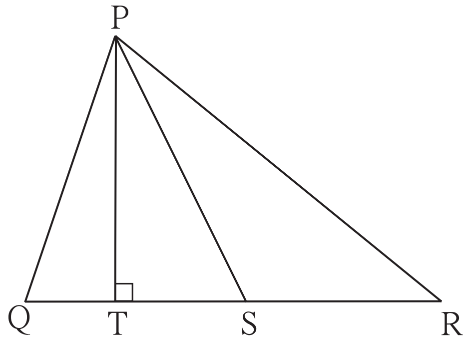
1. Δ PQR मध्ये, बिंदू S हा बाजू QR चा मध्यबिंदू आहे, जर PQ = 11, PR = 17, PS = 13 असेल तर QR ची लांबी काढा.

2. Δ ABC मध्ये, AB = 10, AC = 7, BC = 9 तर बिंदू C मधून बाजू AB वर काढलेल्या मध्यगेची लांबी किती ?

3. आकृती 2.28 मध्ये रेख PS ही Δ PQR ची मध्यगा आहे आणि PT $\perp$ QR तर सिद्ध करा,

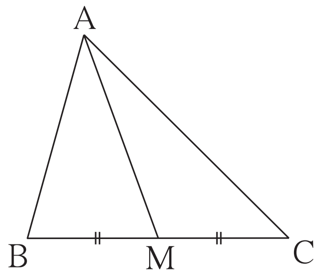
(1) $PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$

(2) $PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$



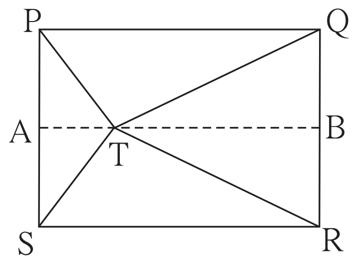
आकृती 2.28

4. आकृती 2.29 मध्ये, Δ ABC च्या बाजू BC चा बिंदू M हा मध्यबिंदू आहे. जर $AB^2 + AC^2$ = 290 सेमी, AM = 8 सेमी, तर BC काढा.



आकृती 2.29

5★. आकृती 2.30 मध्ये दाखविल्यानुसार T हा बिंदू आयत PQRS च्या अंतर्भागात आहे, तर सिद्ध करा, $TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$
(आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे A-T-B असा रेख AB || बाजू SR काढा.)



आकृती 2.30

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. खालील बहुपर्यायी प्रश्नांच्या दिलेल्या उत्तरांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(1) खालीलपैकी कोणते पायथागोरसचे त्रिकुट आहे ?

(A) (1, 5, 10) (B) (3, 4, 5) (C) (2, 2, 2) (D) (5, 5, 2)

(2) काटकोन त्रिकोणात काटकोन करणाऱ्या बाजूंच्या वर्गांची बेरीज 169 असेल, तर त्याच्या कर्णाची लांबी किती ?

(A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

(3) खालीलपैकी कोणत्या तारखेतील संख्या हे पायथागोरसचे त्रिकुट आहे?

(A) 15/08/17 (B) 16/08/16 (C) 3/5/17 (D) 4/9/15

(4) बाजूंच्या लांबी a, b, c असलेल्या त्रिकोणामध्ये जर $a^2 + b^2 = c^2$ असेल तर तो कोणत्या प्रकारचा त्रिकोण असेल?

(A) विशालकोन त्रिकोण (B) लघुकोन त्रिकोण (C) काटकोन त्रिकोण (D)समभुज त्रिकोण

(5) एका चौरसाचा कर्ण $10\sqrt{2}$ सेमी असल्यास त्याची परिमिती .... असेल.

(A) 10 सेमी (B) $40\sqrt{2}$ सेमी (C) 20 सेमी (D) 40 सेमी

(6) एका काटकोन त्रिकोणात कर्णावरील शिरोलंबामुळे कर्णाचे 4 सेमी व 9 सेमी लांबीचे दोन भाग होतात, तर त्या शिरोलंबाची लांबी किती?

(A) 9 सेमी (B) 4 सेमी (C) 6 सेमी (D) $2\sqrt{6}$ सेमी

(7) काटकोन त्रिकोणामध्ये काटकोन करणाऱ्या बाजू 24 सेमी व 18 सेमी असतील तर त्याच्या कर्णाची लांबी .... असेल.

(A) 24 सेमी (B) 30 सेमी (C) 15 सेमी (D) 18 सेमी

(8) Δ ABC मध्ये, AB = $6\sqrt{3}$ सेमी, AC = 12 सेमी आणि BC = 6 सेमी तर $\angle$ A चे माप किती?

(A) 30° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

2. खालील उदाहरणे सोडवा.

(1) एका समभुज त्रिकोणाची बाजू $2a$ आहे, तर त्याची उंची काढा.

(2) 7 सेमी, 24 सेमी, 25 सेमी बाजू असलेला त्रिकोण काटकोन त्रिकोण होईल का? सकारण लिहा.

(3) आयताच्या बाजू 11 सेमी व 60 सेमी असतील, तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.

(4) एका काटकोन त्रिकोणामध्ये काटकोन करणाऱ्या बाजू 9 सेमी व 12 सेमी आहेत, तर त्या त्रिकोणाच्या कर्णाची लांबी काढा.

(5) समद्विभुज काटकोन त्रिकोणाची बाजू x आहे, तर त्याच्या कर्णाची लांबी काढा.

(6) Δ PQR मध्ये; PQ = $\sqrt{8}$, QR = $\sqrt{5}$, PR = $\sqrt{3}$; तर Δ PQR हा काटकोन त्रिकोण आहे का? असल्यास त्याचा कोणता कोन काटकोन आहे?

3. Δ RST मध्ये, $\angle$ S = 90°, $\angle$ T = 30°, RT = 12 सेमी तर RS व ST काढा.

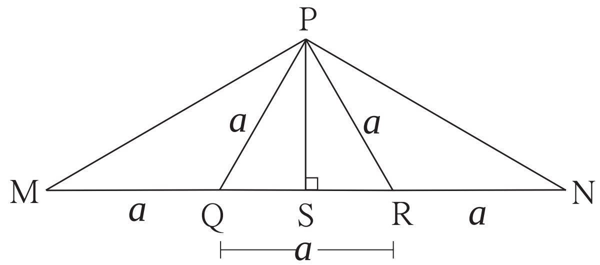
4. आयताचे क्षेत्रफळ 192 चौसेमी असून त्याची लांबी 16 सेमी आहे, तर आयताच्या कर्णाची लांबी काढा.

5★. एका समभुज त्रिकोणाची उंची $\sqrt{3}$ सेमी आहे, तर त्या त्रिकोणाच्या बाजूची लांबी व परिमिती काढा.

6. Δ ABC मध्ये रेख AP ही मध्यगा आहे. जर BC = 18, $AB^2 + AC^2 = 260$ तर AP काढा.

7★. Δ ABC हा समभुज त्रिकोण आहे. पाया BC वर P बिंदू असा आहे की PC = $\frac{1}{3}$ BC, जर AB = 6 सेमी तर AP काढा.

8. आकृती 2.31 मध्ये, M-Q-R-N. दिलेल्या माहितीवरून सिद्ध करा:
PM = PN = $\sqrt{3} \times a$

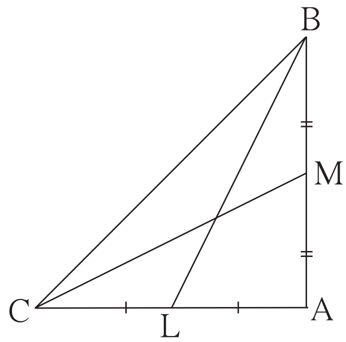


आकृती 2.31

9. सिद्ध करा: समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णांच्या वर्गांची बेरीज ही त्या चौकोनाच्या बाजूंच्या वर्गांच्या बेरजेबरोबर असते.

10. प्रणाली आणि प्रसाद एकाच ठिकाणावरून पूर्व आणि उत्तर दिशेला सारख्या वेगाने निघाले.दोन तासांनंतर त्यांच्यामधील अंतर $15\sqrt{2}$ किमी असेल तर त्यांचा ताशी वेग काढा.

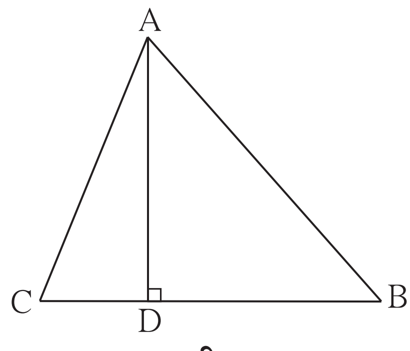
11★. Δ ABC मध्ये $\angle$ BAC = 90°,
रेख BL व रेख CM या Δ ABC च्या मध्यगा आहेत, तर सिद्ध करा :
$4(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$



आकृती 2.32

12. एका समांतरभुज चौकोनाच्या लगतच्या दोन बाजूंच्या वर्गांची बेरीज 130 चौसेमी असून त्याच्या एका कर्णाची लांबी 14 सेमी आहे तर त्याच्या दुसऱ्या कर्णाची लांबी किती ?

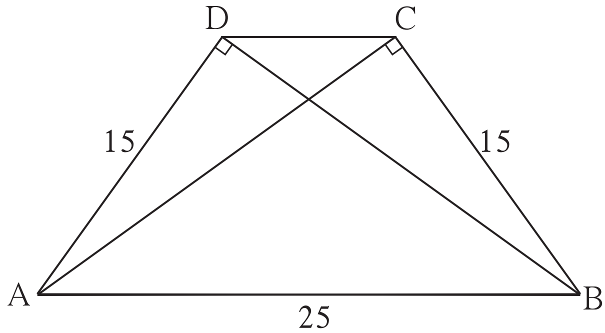
13. Δ ABC मध्ये रेख AD $\perp$ रेख BC आणि
DB = 3CD, तर सिद्ध करा :
$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$



आकृती 2.33

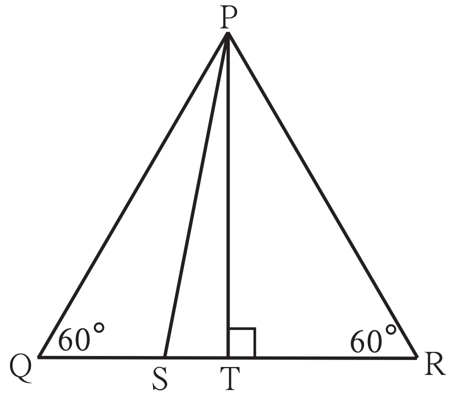
14★. समद्विभुज त्रिकोणामध्ये एकरूप बाजूंची लांबी 13 सेमी असून त्याचा पाया 10 सेमी आहे, तर त्या त्रिकोणाच्या मध्यगासंपातापासून पायाच्या समोरील शिरोबिंदूपर्यंतचे अंतर काढा.

15. समलंब चौकोन ABCD मध्ये,
रेख AB || रेख DC
रेख BD ⊥ रेख AD,
रेख AC ⊥ रेख BC,
जर AD = 15, BC = 15 आणि AB = 25
असेल तर A(□ ABCD) किती ?



आकृती 2.34

16★. आकृतीमध्ये Δ PQR हा समभुज त्रिकोण असून बिंदू S हा रेख QR वर अशा प्रकारे आहे की,
$QS = \frac{1}{3}$ QR तर सिद्ध करा; $9\ PS^2 = 7\ PQ^2$



आकृती 2.35

17★. रेख PM ही Δ PQR ची मध्यगा आहे. जर PQ = 40, PR = 42 आणि PM = 29, तर QR काढा.

18. रेख AM ही Δ ABC ची मध्यगा आहे. जर AB = 22, AC = 34, BC = 24, तर बाजू AM ची लांबी काढा.

ICT Tools or Links

इंटरनेटवरून 'Story on the life of Pythagoras' ची माहिती मिळवा. Slide show तयार करा.

4JHR79