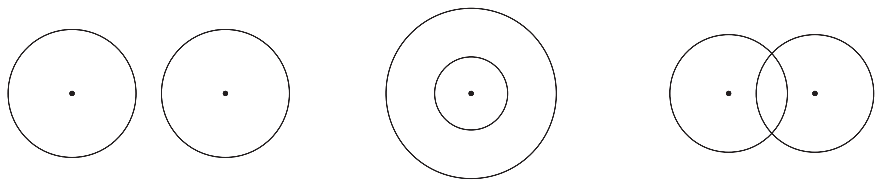
3 वर्तुळ

चला, शिकूया.

- एका, दोन, तीन बिंदूतून जाणारी वर्तुळे
- स्पर्शवर्तुळे
- अंतर्लिखित कोन व अंतर्खंडित कंस
- स्पर्शिका छेदिका कोनाचे प्रमेय
- वृत्तछेदिका व स्पर्शिका
- वर्तुळकंस
- चक्रीय चौकोन
- जीवांच्या छेदनांचे प्रमेय

जरा आठवूया.

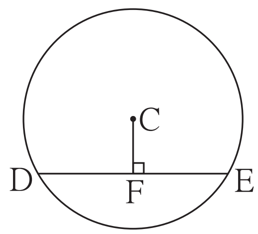
वर्तुळ या आकृतीसंबंधीच्या केंद्र, त्रिज्या, व्यास, जीवा, अंतर्भाग, बाह्यभाग या संज्ञांचा चांगला परिचय तुम्हाला झाला आहे. एकरूप वर्तुळे, समकेंद्री वर्तुळे व छेदणारी वर्तुळे या संज्ञा आठवा.



एकरूप वर्तुळे | समकेंद्री वर्तुळे | छेदणारी वर्तुळे

इयत्ता नववीत अभ्यासलेले जीवांचे गुणधर्म पुढील कृतींच्या सहाय्याने आठवा.

कृती I : सोबतच्या आकृतीत केंद्र C असलेल्या वर्तुळाची रेख DE ही जीवा आहे. रेख CF ⊥ जीवा DE. जर वर्तुळाचा व्यास 20 सेमी आणि DE = 16 सेमी असेल, तर CF = किती ?



आकृती 3.1

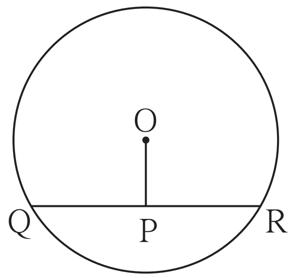
हा प्रश्न सोडविण्यासाठी उपयोगी पडणारी प्रमेये आणि गुणधर्म आठवून लिहा.

(1) वर्तुळकेंद्रातून जीवेवर काढलेला लंब ______

(2) ______

(3) ______

हे गुणधर्म वापरून प्रश्न सोडवा.



आकृती 3.2

कृती II : सोबतच्या आकृतीत केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची रेख QR ही जीवा आहे. बिंदू P हा जीवा QR चा मध्यबिंदू आहे. जर QR = 24, OP = 10 तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

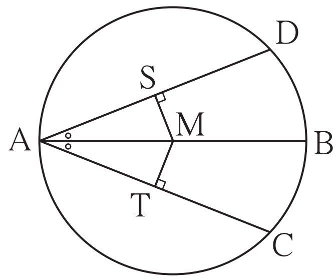
हा प्रश्न सोडविण्यासाठी उपयोगी पडणारी प्रमेये लिहा.

(1) ______________________

(2) ______________________

या प्रमेयांचा उपयोग करून उदाहरण सोडवा.

कृती III : आकृतीत वर्तुळकेंद्र M आणि
रेख AB हा व्यास आहे.
रेख MS $\perp$ जीवा AD
रेख MT $\perp$ जीवा AC
$\angle DAB \cong \angle CAB$.
तर सिद्ध करा; जीवा AD $\cong$ जीवा AC.



आकृती 3.3

हा प्रश्न सोडविण्यासाठी खालीलपैकी कोणते प्रमेय वापराल ?

(1) वर्तुळाच्या दोन जीवा वर्तुळकेंद्रापासून समदूर असतील, तर त्या समान लांबीच्या असतात.

(2) एकाच वर्तुळाच्या एकरूप जीवा वर्तुळकेंद्रापासून समदूर असतात.

याशिवाय त्रिकोणांच्या एकरूपतेची खालीलपैकी कोणती कसोटी उपयोगी पडेल ?

(1) बाकोबा, (2) कोबाको, (3) बाबाबा, (4) कोकोबा, (5) कर्णभुजा.

योग्य ती कसोटी आणि प्रमेय वापरून सिद्धता लिहा.

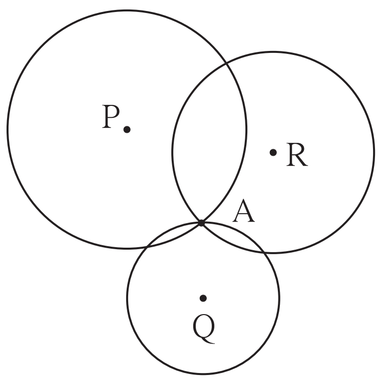
जाणून घेऊया.

एका, दोन, तीन बिंदूंतून जाणारी वर्तुळे

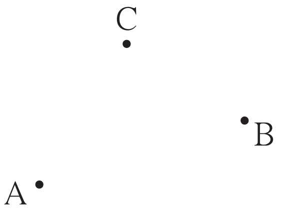
सोबतच्या आकृतीत, एका प्रतलात बिंदू A दाखविला आहे. केंद्रबिंदू P, Q, R असणारी तीनही वर्तुळे A या बिंदूतून जातात. बिंदू A मधून जाणारी आणखी किती वर्तुळे असतील असे तुम्हाला वाटते ?

तुमचे उत्तर 'कितीही' किंवा 'असंख्य' असे असेल, तर ते बरोबर आहे.

एकाच बिंदूतून जाणारी असंख्य वर्तुळे असतात.



आकृती 3.4

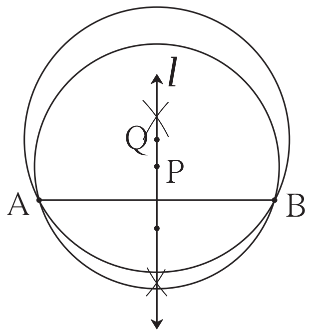


सोबतच्या आकृतीतील A आणि B या दोन भिन्न बिंदूतून जाणारी किती वर्तुळे असतील?

A, B, C या तिन्ही बिंदूतून जाणारी किती वर्तुळे असतील? पुढे दिलेल्या कृतींतून काही उत्तर मिळते का पाहा.

आकृती 3.5

कृती I : बिंदू A आणि बिंदू B यांना जोडणारा रेख AB काढा. या रेषाखंडाची लंबदुभाजक रेषा *l* काढा. रेषा *l* वरील बिंदू P हे केंद्र आणि PA त्रिज्या घेऊन वर्तुळ काढा. हे वर्तुळ बिंदू B मधूनही जाते, हे पाहा. याचे कारण शोधा. (लंबदुभाजक रेषेचा गुणधर्म आठवा.)



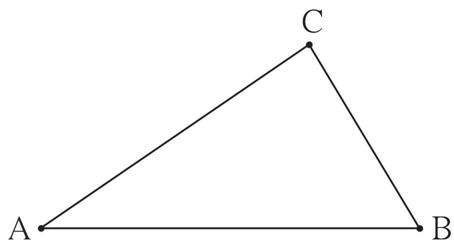
आकृती 3.6

रेषा *l* चा Q हा आणखी एक बिंदू घेऊन, केंद्र Q आणि त्रिज्या QA घेऊन काढलेले वर्तुळही बिंदू B मधून जाईल का ? विचार करा.

बिंदू A आणि बिंदू B मधून जाणारी आणखी किती वर्तुळे काढता येतील ? त्यांच्या केंद्रबिंदूंची स्थाने कोठे असतील ?

कृती II : नैकरेषीय बिंदू A, B, C काढा. या तिन्ही बिंदूतून जाणारे वर्तुळ काढण्यासाठी काय करावे लागेल ? या तिन्ही बिंदूतून जाणारे वर्तुळ काढा.

याच तीन बिंदूतून जाणारे आणखी एक वर्तुळ काढता येईल का ? विचार करा.



आकृती 3.7

कृती III : एकरेषीय असलेले D, E, F हे बिंदू काढा. या तिन्ही बिंदूतून जाणारे वर्तुळ काढण्याचा प्रयत्न करा. असे वर्तुळ काढता येत नसेल, तर ते का काढता येत नाही याचा विचार करा.

हे लक्षात ठेवूया.

(1) एका बिंदूतून जाणारी असंख्य वर्तुळे असतात.

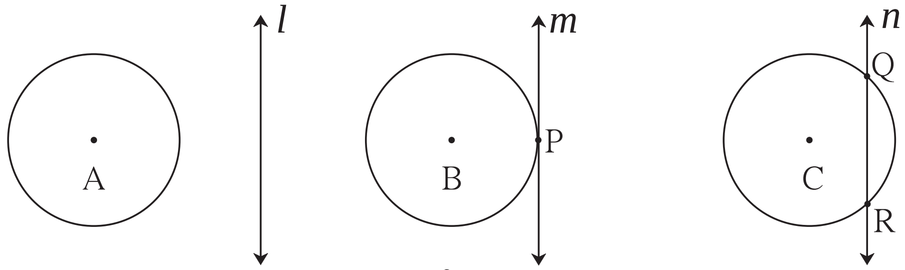
(2) दोन भिन्न बिंदूतून जाणारी असंख्य वर्तुळे असतात.

(3) तीन नैकरेषीय बिंदूतून जाणारे एक आणि एकच वर्तुळ असते.

(4) तीन एकरेषीय बिंदूतून जाणारे एकही वर्तुळ नसते.

जाणून घेऊया.

वृत्तछेदिका आणि स्पर्शिका (Secant and tangent)



आकृती 3.8

आकृतीमध्ये, रेषा l व वर्तुळ यांच्यामध्ये एकही सामाईक बिंदू नाही.

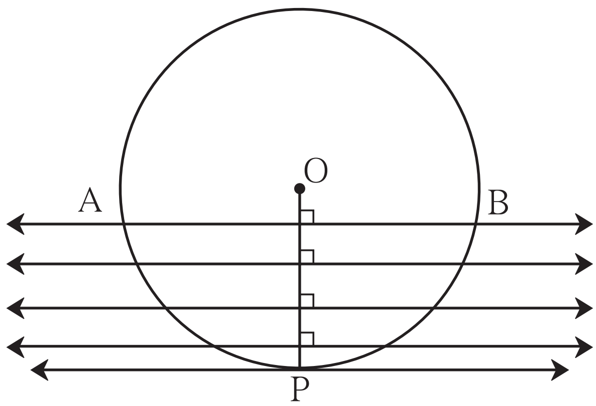
रेषा m व वर्तुळ यांच्यामध्ये बिंदू P हा एकच सामाईक बिंदू आहे. येथे m ही वर्तुळाची स्पर्शिका आहे व बिंदू P हा स्पर्शबिंदू आहे असे म्हणतात.

रेषा n व वर्तुळ यांना दोन सामाईक बिंदू आहेत. Q व R हे रेषा व वर्तुळ यांचे छेदनबिंदू आहेत व रेषा n ही वृत्तछेदिका आहे असे म्हणतात.

वर्तुळाच्या स्पर्शिकेचा एक महत्त्वाचा गुणधर्म एका कृतीतून समजून घ्या.

कृती :

केंद्र O असलेले एक पुरेसे मोठे वर्तुळ काढा. त्या वर्तुळाची रेख OP ही एक त्रिज्या काढा. या त्रिज्येला लंब असणारी एक रेषा काढा. ही रेषा आणि वर्तुळ यांच्या छेदनबिंदूंना A व B नावे द्या. कल्पना करा, की रेषा AB ही बिंदू O कडून बिंदू P कडे अशी सरकत आहे की तिची आधीची स्थिती नव्या स्थितीला समांतर राहील; म्हणजेच सरकलेली रेषा AB आणि त्रिज्या यांतील कोन काटकोनच राहील.



आकृती 3.9

हे घडताना बिंदू A आणि B वर्तुळावरून परस्परांच्या जवळ जवळ येऊ लागतील. सरते शेवटी ते बिंदू P मध्ये सामावले जातील.

या स्थितीत रेषा AB ची नवी स्थिती ही वर्तुळाची स्पर्शिका होईल, परंतु त्रिज्या OP आणि रेषा AB ची नवी स्थिती यांतील कोन मात्र काटकोनच राहील.

यावरून लक्षात येते, की वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका तो बिंदू जोडणाऱ्या त्रिज्येला लंब असते. ह्या गुणधर्माला 'स्पर्शिका - त्रिज्या प्रमेय' म्हणतात.

स्पर्शिका - त्रिज्या प्रमेय (Tangent theorem)

प्रमेय : **वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका, तो बिंदू केंद्राशी जोडणाऱ्या त्रिज्येला लंब असते.**
हे प्रमेय अप्रत्यक्ष पद्धतीने सिद्ध करता येते.

अधिक माहितीसाठी :

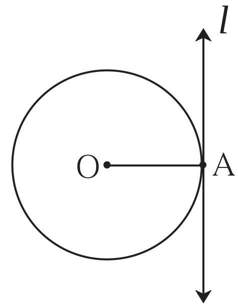
पक्ष : केंद्र O असलेल्या वर्तुळाला रेषा l ही बिंदू A मध्ये स्पर्श करते. रेख OA ही त्रिज्या आहे.

साध्य : रेषा $l \perp$ त्रिज्या OA.

सिद्धता : समजा, रेषा l ही रेख OA ला लंब नाही.

समजा बिंदू O मधून l वर OB हा लंब टाकला.

साहजिकच बिंदू B हा बिंदू A पेक्षा भिन्न असला पाहिजे. (आकृती 3.11 पाहा.)



आकृती 3.10

रेषा l वर बिंदू C असा घेता येईल, की A-B-C आणि BA = BC.

आता, Δ OBC आणि Δ OBA यांमध्ये,

रेख BC $\cong$ रेख BA .... (रचना)

$\angle$ OBC $\cong$ $\angle$OBA .... (प्रत्येक काटकोन)

रेख OB $\cong$ रेख OB

$\therefore$ Δ OBC $\cong$ Δ OBA .... (बाकोबा कसोटी)

$\therefore$ OC = OA

परंतु रेख OA ही त्रिज्या आहे, म्हणून

रेख OC ही सुद्धा त्रिज्या होईल.

$\therefore$ बिंदू C हा वर्तुळावर असेल.

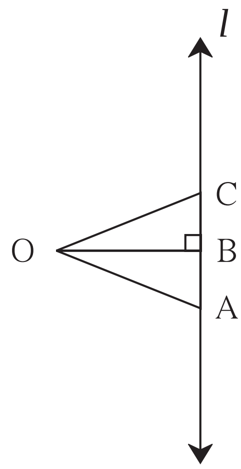
म्हणजे रेषा l ही वर्तुळाला A आणि C या दोन बिंदूंत छेदेल.

हे विधान पक्षाशी विसंगत आहे. कारण रेषा l स्पर्शिका आहे.

म्हणजे रेषा l वर्तुळाला एकाच बिंदूत छेदते. .... (पक्ष)

$\therefore$ रेषा l ही त्रिज्या OA ला लंब नाही, हे असत्य आहे.

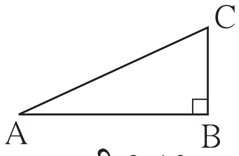
$\therefore$ रेषा $l \perp$ त्रिज्या OA.



आकृती 3.11

जरा आठवूया.

आपण शिकलेल्या कोणत्या प्रमेयाचा उपयोग करून काटकोन त्रिकोणात कर्ण ही सर्वात मोठी बाजू असते हे सिद्‌ध करता येईल?

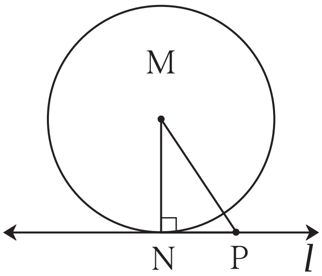


आकृती 3.12

जाणून घेऊया.

स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेयाचा व्यत्यास (Converse of tangent theorem)

प्रमेय : **वर्तुळाच्या त्रिज्येच्या बाह्यटोकातून जाणारी आणि त्या त्रिज्येला लंब असणारी रेषा त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते.**



आकृती 3.13

पक्ष : रेख MN ही केंद्र M असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या आहे. बिंदू N मधून जाणारी रेषा l ही त्रिज्या MN ला लंब आहे.

साध्य : रेषा l ही त्या वर्तुळाची स्पर्शिका आहे.

सिद्‌धता : रेषा l चा P हा N खेरीज दुसरा कोणताही बिंदू घेतला. रेख MP काढला.

आता, Δ MNP मध्ये $\angle$ N हा काटकोन आहे.

$\therefore$ रेख MP हा कर्ण आहे.

$\therefore$ रेख MP > रेख MN.

$\therefore$ बिंदू P हा वर्तुळावर असणे शक्य नाही.

म्हणजे रेषा l चा N खेरीज इतर कोणताही बिंदू वर्तुळावर नाही.

$\therefore$ रेषा l ही वर्तुळाला N या एकाच बिंदूत छेदते.

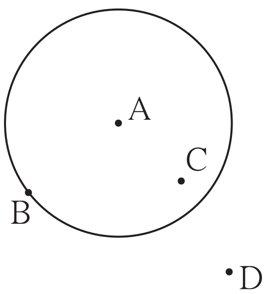
$\therefore$ रेषा l ही त्या वर्तुळाची स्पर्शिका आहे.

चला, चर्चा करूया.

केंद्र A असणाऱ्या वर्तुळावरील B हा एक बिंदू दिला आहे. या वर्तुळाची बिंदू B मधून जाणारी स्पर्शिका काढावयाची आहे.

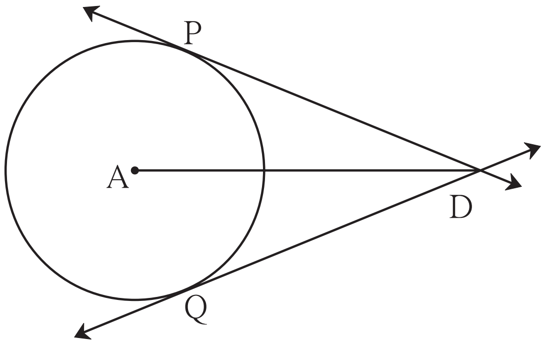
B या बिंदूतून जाणाऱ्या असंख्य रेषा असतात. त्यांपैकी कोणती रेषा या वर्तुळाची स्पर्शिका असेल? ती कशी काढता येईल?

बिंदू B मधून जाणाऱ्या एकापेक्षा जास्त स्पर्शिका असू शकतील का?



आकृती 3.14

वर्तुळाच्या अंतर्भागातील C या बिंदूतून त्या वर्तुळाला स्पर्शिका काढता येतील का?



आकृती 3.15

वर्तुळाच्या बाह्यभागातील D या बिंदूतून जाणाऱ्या त्या वर्तुळाच्या स्पर्शिका असू शकतील का? असल्यास अशा किती स्पर्शिका असतील?

चर्चेतून तुमच्या लक्षात आलेच असेल, की आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे वर्तुळाच्या बाह्यभागातून त्या वर्तुळाला दोन स्पर्शिका काढता येतील.

सोबतच्या आकृतीत रेषा DP आणि रेषा DQ या स्पर्शिका, केंद्र A असलेल्या वर्तुळाला बिंदू P आणि बिंदू Q मध्ये स्पर्श करतात.

रेख DP आणि रेख DQ यांना स्पर्शिकाखंड म्हणतात.

स्पर्शिकाखंडाचे प्रमेय (Tangent segment theorem)

प्रमेय : **वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदूपासून त्या वर्तुळाला काढलेले स्पर्शिकाखंड एकरूप असतात.**

शेजारील आकृतीच्या आधारे पक्ष आणि साध्य ठरवा.

त्रिज्या AP आणि AQ काढून या प्रमेयाची खाली दिलेली सिद्धता रिकाम्या जागा भरून पूर्ण करा.

सिद्धता : Δ PAD आणि Δ QAD यांमध्ये,

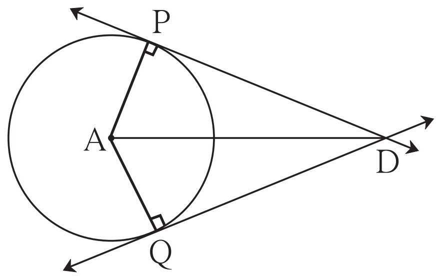
बाजू PA $\cong$ ________ (एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

बाजू AD $\cong$ बाजू AD ________

$\angle APD = \angle AQD = 90^\circ$ ...... (स्पर्शिकेचे प्रमेय)

$\therefore$ Δ PAD $\cong$ Δ QAD ________

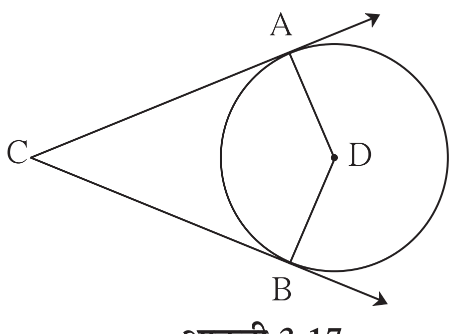
$\therefore$ बाजू DP $\cong$ बाजू DQ ________



आकृती 3.16

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) दिलेल्या आकृतीत, केंद्र D असलेले वर्तुळ $\angle ACB$ च्या बाजूंना बिंदू A आणि B मध्ये स्पर्श करते. जर $\angle ACB = 52^\circ$, तर $\angle ADB$ चे माप काढा.



आकृती 3.17

उकल : चौकोनाच्या चारही कोनांच्या मापांची बेरीज 360° असते.

$\therefore \angle ACB + \angle CAD + \angle CBD + \angle ADB = 360^\circ$

$\therefore 52^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle ADB = 360^\circ$ .... स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय

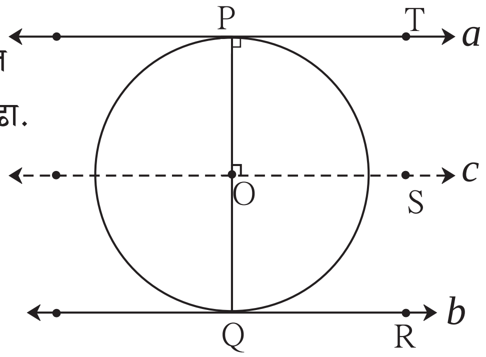
$\therefore \angle ADB + 232^\circ = 360^\circ$

$\therefore \angle ADB = 360^\circ - 232^\circ = 128^\circ$

उदा. (2) रेषा a आणि रेषा b ह्या केंद्र O असणाऱ्या वर्तुळाच्या समांतर स्पर्शिका वर्तुळाला अनुक्रमे बिंदू P व Q मध्ये स्पर्श करतात, तर रेख PQ हा त्या वर्तुळाचा व्यास आहे हे सिद्ध करा.

सिद्धता : बिंदू O मधून रेषा a ला समांतर रेषा c काढा.

रेषा a, c, b यांवर अनुक्रमे बिंदू T, S, R आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे घ्या. त्रिज्या OP आणि त्रिज्या OQ काढा.



आकृती 3.18

आता, $\angle OPT = 90°$ ..... स्पर्शिका –त्रिज्या प्रमेय

$\therefore$ $\angle SOP = 90°$..... (अंतर्कोन गुणधर्म) .... (I)

आता, रेषा $a \parallel$ रेषा c ..... (रचना)

रेषा $a \parallel$ रेषा b ..... (पक्ष)

रेषा $b \parallel$ रेषा c

आता, $\angle OQR = 90°$ ..... स्पर्शिका –त्रिज्या प्रमेय

$\therefore$ $\angle SOQ = 90°$.....(अंतर्कोन गुणधर्म) .... (II)

$\therefore$ (I) व (II) वरून,

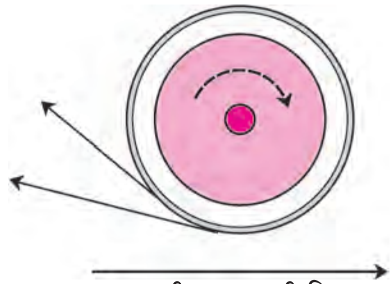
$\angle SOP + \angle SOQ = 90° + 90° = 180°$

$\therefore$ किरण OP आणि किरण OQ हे विरुद्ध किरण आहेत.

$\therefore$ बिंदू P, O, Q एकरेषीय आहेत.

$\therefore$ रेख PQ हा वर्तुळाचा व्यास आहे.

पावसाळ्यात थोडे पाणी साठलेल्या रस्त्यावरून मोटार सायकल जात असताना तिच्या मागील चाकावरून उडणाऱ्या पाण्याच्या धारा तुम्ही पाहिल्या असतील. त्या धारा वर्तुळाच्या स्पर्शिकांप्रमाणे दिसतात हे तुमच्या लक्षात आले असेल. त्या धारा तशाच का असतात याची माहिती तुमच्या विज्ञान शिक्षकाकडून घ्या.


चाकाची धावण्याची दिशा

फिरणाऱ्या भुईचक्रातून उडणाऱ्या ठिणग्या, सुरीला धार लावताना उडणाऱ्या ठिणग्या यांचे निरीक्षण करा.त्याही स्पर्शिकांप्रमाणेच दिसतात का ?

हे लक्षात ठेवूया.

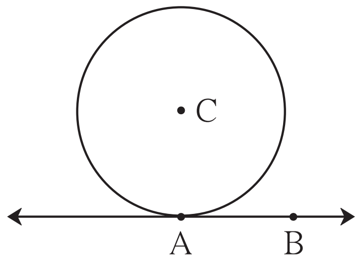
(1) स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेय : वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका, तो बिंदू केंद्राशी जोडणाऱ्या त्रिज्येला लंब असते.

(2) स्पर्शिका-त्रिज्या प्रमेयाचा व्यत्यास : वर्तुळाच्या त्रिज्येच्या बाह्यटोकातून जाणारी आणि त्या त्रिज्येला लंब असणारी रेषा त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते.

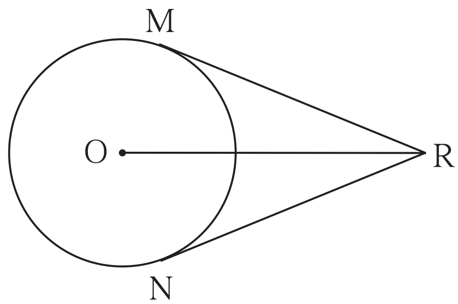
(3) वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदूपासून त्या वर्तुळाला काढलेले स्पर्शिकाखंड एकरूप असतात.

सरावसंच 3.1

1. सोबतच्या आकृतीत, केंद्र C असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या 6 सेमी आहे. रेषा AB या वर्तुळाला बिंदू A मध्ये स्पर्श करते. या माहितीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.
   (1) $\angle CAB$ चे माप किती अंश आहे? का?
   (2) बिंदू C हा रेषा AB पासून किती अंतरावर आहे? का?
   (3) जर $d(A,B) = 6$ सेमी, तर $d(B,C)$ काढा.
   (4) $\angle ABC$ चे माप किती अंश आहे? का?



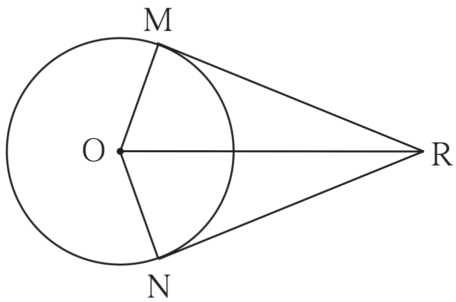
आकृती 3.19



आकृती 3.20

2. शेजारील आकृतीत, केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या बाह्यभागातील R या बिंदूपासून काढलेले RM आणि RN हे स्पर्शिकाखंड वर्तुळाला बिंदू M आणि N मध्ये स्पर्श करतात.
   जर OR = 10 सेमी व वर्तुळाची त्रिज्या 5 सेमी असेल तर -
   (1) प्रत्येक स्पर्शिकाखंडाची लांबी किती?
   (2) $\angle MRO$ चे माप किती?
   (3) $\angle MRN$ चे माप किती?

3. रेख RM आणि रेख RN हे केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचे स्पर्शिकाखंड आहेत, तर रेख OR हा $\angle MRN$ आणि $\angle MON$ या दोन्ही कोनांचा दुभाजक आहे, हे सिद्ध करा.



आकृती 3.21

4. त्रिज्या 4.5 सेमी असलेल्या वर्तुळाच्या दोन स्पर्शिका परस्परांना समांतर आहेत. तर त्या स्पर्शिकांतील अंतर किती हे सकारण लिहा.

ICT Tools or Links

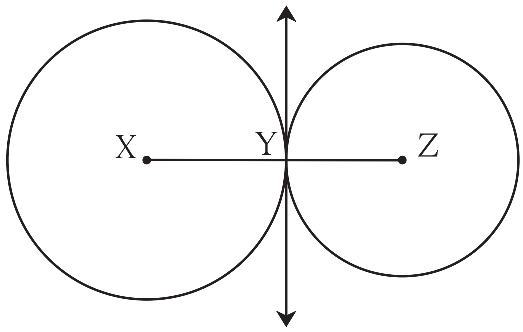
संगणकावर जिओजिब्रा या सॉफ्टवेअरच्या साहाय्याने वर्तुळ व वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदूतून स्पर्शिका काढून स्पर्शिकाखंड एकरूप आहेत याचा पडताळा घ्या.

जाणून घेऊया.

स्पर्श वर्तुळे (Touching circles)

कृती I :

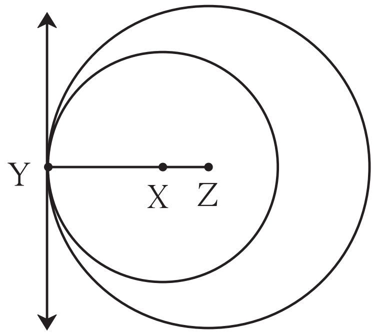
आकृती 3.22 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे, X-Y-Z हे एकरेषीय बिंदू काढा.
केंद्र X व त्रिज्या XY घेऊन वर्तुळ काढा.
केंद्र Z व त्रिज्या YZ घेऊन दुसरे वर्तुळ काढा.
ही दोन वर्तुळे Y या एकाच बिंदूत एकमेकांना छेदतात हे अनुभवा.
बिंदू Y मधून रेख XZ ला लंबरेषा काढा. ही रेषा दोन्ही वर्तुळांची सामाईक स्पर्शिका आहे हे लक्षात घ्या.



आकृती 3.22

कृती II :

आकृती 3.23 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे Y-X-Z हे एकरेषीय बिंदू काढा.
केंद्र Z आणि त्रिज्या ZY घेऊन वर्तुळ काढा.
केंद्र X आणि त्रिज्या XY घेऊन वर्तुळ काढा.
दोन्ही वर्तुळे Y या एकाच बिंदूत छेदतात हे अनुभवा.
बिंदू Y मधून रेख YZ ला लंबरेषा काढा. ही रेषा दोन्ही वर्तुळांची सामाईक स्पर्शिका आहे हे लक्षात घ्या.



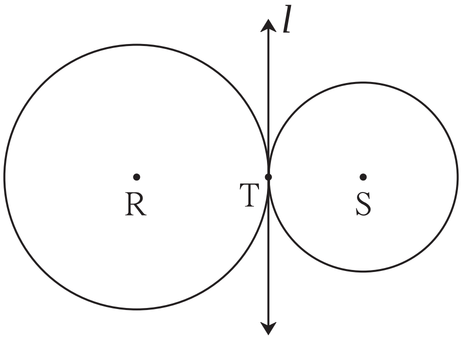
आकृती 3.23

वरील कृतींतून तुमच्या लक्षात आले असेल, की दोन्ही आकृत्यांतील वर्तुळे एकाच प्रतलात आहेत आणि एकमेकांना एकाच बिंदूत छेदतात. अशा वर्तुळांना एकमेकांना स्पर्श करणारी वर्तुळे किंवा **स्पर्शवर्तुळे** म्हणतात.

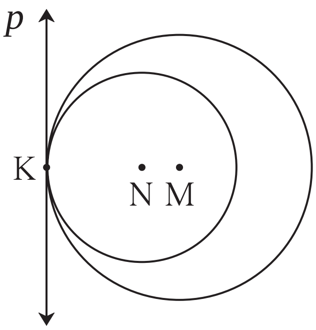
स्पर्शवर्तुळांची व्याख्या पुढीलप्रमाणे करता येते.

एका प्रतलातील दोन वर्तुळे त्याच प्रतलातील एका रेषेला एकाच बिंदूत छेदत असतील, तर त्यांना स्पर्शवर्तुळे म्हणतात. ती रेषा दोन्ही वर्तुळांची सामाईक स्पर्शिका असते.

दोन्ही वर्तुळे व रेषा यांच्यातील सामाईक बिंदूला **सामाईक स्पर्शबिंदू** म्हणतात.



आकृती 3.24



आकृती 3.25

आकृती 3.24 मध्ये, केंद्र R व S असणारी वर्तुळे रेषा *l* ला T या एकाच बिंदूत छेदतात. म्हणून ती दोन्ही स्पर्शवर्तुळे असून रेषा *l* ही त्यांची सामाईक स्पर्शिका आहे. ह्या आकृतीतील वर्तुळे **बाह्यस्पर्शी** आहेत.

आकृती 3.25 मधील वर्तुळे **अंतर्स्पर्शी** असून रेषा *p* ही त्यांची सामाईक स्पर्शिका आहे.

विचार करूया

(1) आकृती 3.24 मधील वर्तुळांप्रमाणे परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांना बाह्यस्पर्शी वर्तुळे का म्हणतात?

(2) आकृती 3.25 मधील वर्तुळांप्रमाणे एकमेकांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांना अंतर्स्पर्शी वर्तुळे का म्हणतात?

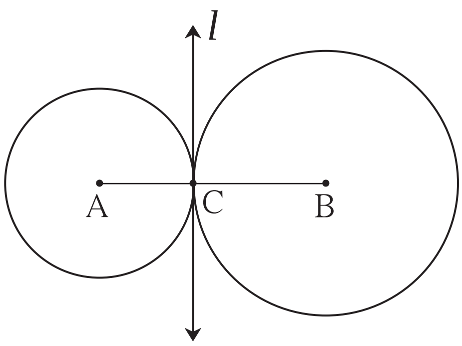
(3) आकृती 3.26 मध्ये, केंद्र A व B असणाऱ्या वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 3 सेमी व 4 सेमी असतील तर–

(i) आकृती 3.26 (*a*) मध्ये *d*(A,B) किती असेल?

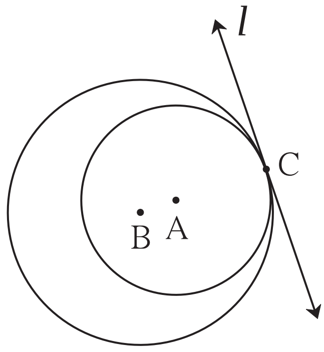
(ii) आकृती 3.26 (*b*) मध्ये *d*(A,B) किती असेल?

स्पर्शवर्तुळांचे प्रमेय (Theorem of touching circles)

प्रमेय : परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदू त्या वर्तुळांचे केंद्रबिंदू जोडणाऱ्या रेषेवर असतो.



(*a*)



(*b*)

आकृती 3.26

पक्ष : केंद्र A व B असणाऱ्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदू C आहे.

साध्य : बिंदू C हा रेषा AB वर आहे.

सिद्धता : समजा, रेषा l ही स्पर्शवर्तुळांची बिंदू C मधून जाणारी सामाईक स्पर्शिका आहे.
रेषा $l \perp$ रेख AC, रेषा $l \perp$ रेख BC. $\therefore$ रेख AC व रेख BC हे रेषा l ला लंब आहेत.
बिंदू C मधून रेषा l ला एकच लंब रेषा काढता येते. $\therefore$ C, A, B एकरेषीय आहेत.

हे लक्षात ठेवूया.

(1) परस्परांना स्पर्श करणाऱ्या वर्तुळांचा स्पर्शबिंदू, त्या वर्तुळांचे केंद्रबिंदू जोडणाऱ्या रेषेवर असतो.

(2) बाह्यस्पर्शी वर्तुळांचा केंद्रांतील अंतर त्यांच्या त्रिज्यांच्या बेरजेएवढे असते.

(3) अंतर्स्पर्शी वर्तुळांच्या केंद्रांतील अंतर त्यांच्या त्रिज्यांतील फरकाएवढे असते.

सरावसंच 3.2

1. दोन अंतर्स्पर्शी वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 3.5 सेमी व 4.8 सेमी आहेत, तर त्यांच्या केंद्रांतील अंतर किती आहे ?

2. बाह्यस्पर्शी असलेल्या दोन वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 5.5 सेमी व 4.2 सेमी असतील तर त्यांच्या केंद्रांतील अंतर किती असेल ?

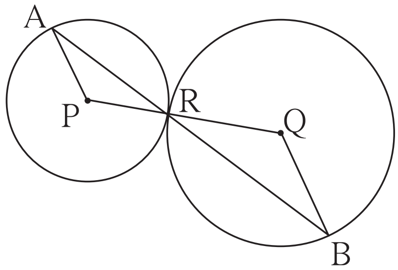
3. त्रिज्या अनुक्रमे 4 सेमी आणि 2.8 सेमी असणारी, (i) बाह्यस्पर्शी (ii) अंतर्स्पर्शी, वर्तुळे काढा.

4. आकृती 3.27 मध्ये, केंद्र P आणि Q असलेली वर्तुळे परस्परांना बिंदू R मध्ये स्पर्श करतात. बिंदू R मधून जाणारी रेषा त्या वर्तुळांना अनुक्रमे बिंदू A व बिंदू B मध्ये छेदते. तर –

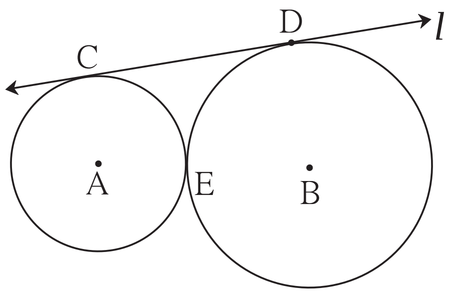
(1) रेख AP || रेख BQ हे सिद्ध करा.

(2) Δ APR ~ Δ RQB हे सिद्ध करा.

(3) जर $\angle$ PAR चे माप 35° असेल, तर $\angle$ RQB चे माप ठरवा.



आकृती 3.27

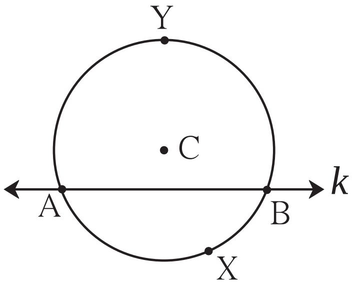


आकृती 3.28

5. आकृती 3.28 मध्ये, केंद्र A व B असणारी वर्तुळे परस्परांना बिंदू E मध्ये स्पर्श करतात. रेषा l ही त्यांची सामाईक स्पर्शिका त्यांना अनुक्रमे C व D मध्ये स्पर्श करते. जर वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 4 सेमी व 6 सेमी असतील, तर रेख CD ची लांबी किती असेल ?

जरा आठवूया.

वर्तुळकंस (Arc of a circle)



आकृती 3.29

वृत्तछेदिकेमुळे वर्तुळाचे दोन भागांत विभाजन होते. यांपैकी कोणताही एक भाग आणि वृत्तछेदिकेचे वर्तुळावरील बिंदू यांनी मिळून होणाऱ्या आकृतीला **वर्तुळकंस** म्हणतात.

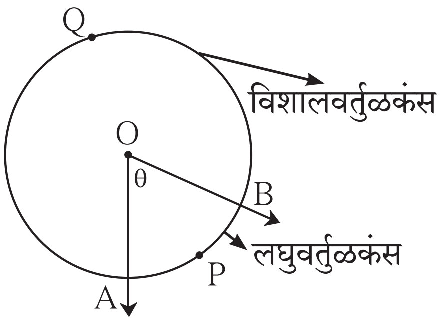
वर्तुळ आणि वृत्तछेदिका यांच्या छेदनबिंदूंना कंसांचे अंत्यबिंदू किंवा कंसांची टोके म्हणतात.

आकृती 3.29 मध्ये, वृत्तछेदिका k मुळे, केंद्र C असलेल्या वर्तुळाचे AYB आणि AXB हे दोन कंस तयार झाले आहेत.

वृत्तछेदिकेच्या ज्या बाजूला वर्तुळकेंद्र असते त्या बाजूच्या कंसाला **विशालकंस** आणि विरुद्ध बाजूच्या कंसाला **लघुकंस** म्हणतात. आकृती 3.29 मध्ये कंस AYB हा विशालकंस आणि कंस AXB हा लघुकंस आहे. एखाद्या वर्तुळकंसाचे नाव तीन अक्षरे वापरून लिहिल्याने तो नेमका समजतो, परंतु काही संदिग्धता निर्माण होत नसेल तर लघुकंसाचे नाव त्याचे अंत्यबिंदू दर्शवणाऱ्या दोन अक्षरांनी लिहितात. उदाहरणार्थ, आकृती 3.29 मधील कंस AXB हा कंस AB असाही लिहितात.

आपण कंसाचे नाव लिहिण्यासाठी हीच पद्धत वापरणार आहोत.

केंद्रीय कोन (Central angle)



आकृती 3.30

ज्या कोनाचा शिरोबिंदू वर्तुळकेंद्रावर असतो. त्या कोनाला **केंद्रीय कोन** म्हणतात.

आकृती 3.30 मध्ये केंद्र O असलेले वर्तुळ असून $\angle$ AOB हा केंद्रीय कोन आहे.

वृत्तछेदिकेप्रमाणेच केंद्रीय कोनामुळेसुद्धा वर्तुळाचे दोन कंसांत विभाजन होते.

कंसाचे माप (Measure of an arc)

काही वेळा दोन कंसांची तुलना करण्याची गरज पडते. त्यासाठी कंसाच्या मापाची व्याख्या पुढीलप्रमाणे ठरवलेली आहे.

(1) लघुकंसाचे माप त्याच्या संगत केंद्रीय कोनाच्या मापाएवढे असते.

आकृती 3.30 मध्ये केंद्रीय $\angle$ AOB चे माप θ आहे. म्हणून लघुकंस APB चे माप θ हेच आहे.

(2) विशालकंसाचे माप = 360° – संगत लघुकंसाचे माप.

आकृती 3.30 मध्ये विशालकंस AQB चे माप = 360° – कंस APB चे माप = $360^\circ - \theta$

(3) अर्धवर्तुळकंसाचे माप, म्हणजेच अर्धवर्तुळाचे माप 180° असते.

(4) पूर्ण वर्तुळाचे माप 360° असते.

जाणून घेऊया.

कंसांची एकरूपता (Congruence of arcs)

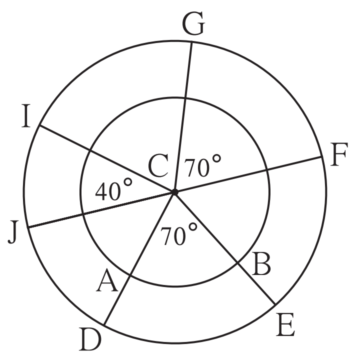
जेव्हा दोन प्रतलीय आकृत्या एकमेकींशी तंतोतंत जुळतात, तेव्हा त्या आकृत्या एकमेकींशी एकरूप आहेत, असे म्हणतात.एकरूपतेच्या या संकल्पनेच्या आधारे समान मापांचे कोन एकरूप असतात हे आपल्याला माहीत आहे.

त्याचप्रमाणे दोन कंसांची मापे समान असतील तर ते दोन कंस एकरूप असतील का?

या प्रश्नाचे उत्तर पुढील कृती करून शोधा.

कृती :

आकृती 3.31 मध्ये दर्शवल्याप्रमाणे केंद्र C असणारी दोन वर्तुळे काढा. $\angle$ DCE आणि $\angle$ FCG हे समान मापांचे कोन काढा. या कोनांच्या मापापेक्षा वेगळे माप असणारा $\angle$ ICJ काढा.



आकृती 3.31

$\angle$ DCE च्या भुजा आतील वर्तुळाला छेदल्यामुळे मिळणाऱ्या कंसाला AB नाव द्या.

कंसाच्या मापाच्या व्याख्येवरून, कंस AB आणि कंस DE यांची मापे समान आहेत, हे लक्षात आले का? हे कंस परस्परांशी तंतोतंत जुळतील का? निश्चितच नाही जुळणार.

आता C-DE; C-FG आणि C-IJ या वर्तुळपाकळ्या कापून वेगळ्या करा. त्या एकमेकींशी जुळवून DE, FG आणि IJ यांपैकी कोणते कंस परस्परांशी जुळतात हे पाहा.

या कृतीवरून, दोन कंस एकरूप होण्यासाठी 'त्यांची मापे समान असणे' पुरेसे नाही, हे लक्षात आले का?

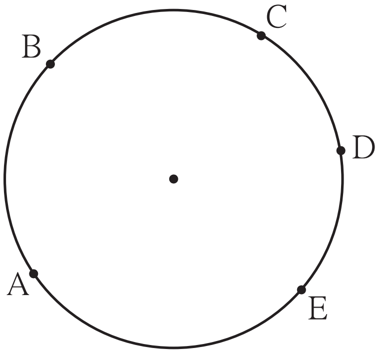
दोन कंस एकरूप असण्यासाठी आणखी कोणती अट पूर्ण होणे आवश्यक आहे असे तुम्हांला वाटते?

वरील कृतीवरून लक्षात येते, की –

दोन कंसांच्या त्रिज्या आणि त्यांची मापे समान असतात, तेव्हा ते दोन कंस परस्परांशी एकरूप असतात.

'कंस DE व कंस GF एकरूप आहेत' हे चिन्हाने कंस DE $\cong$ कंस GF असे दर्शवतात.

कंसांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म (Property of sum of measures of arcs)



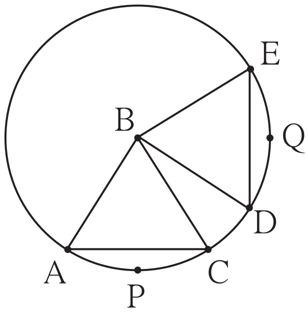
आकृती 3.32

आकृती 3.32 मध्ये A, B, C, D, E हे एकाच वर्तुळाचे बिंदू आहेत. या बिंदूंमुळे अनेक कंस तयार झाले आहेत. यांपैकी कंस ABC आणि कंस CDE यांमध्ये C हा एक आणि एकच बिंदू सामाईक आहे. म्हणून कंस ABC आणि कंस CDE यांच्या मापांची बेरीज कंस ACE च्या मापाएवढी होते.

m(कंस ABC) + m(कंस CDE) = m(कंस ACE)

परंतु कंस ABC आणि कंस BCE यांमध्ये एकापेक्षा अधिक बिंदू [कंस BC चे सर्व] सामाईक आहेत. म्हणून कंस ABC आणि कंस BCE यांच्या मापांची बेरीज कंस ABE च्या मापाएवढी नसते.

प्रमेय : एकाच वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळांच्या) एकरूप कंसांच्या संगत जीवा एकरूप असतात.



आकृती 3.33

पक्ष : केंद्र B असलेल्या वर्तुळात कंस APC ≅ कंस DQE

साध्य : जीवा AC ≅ जीवा DE

सिद्धता : (रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.)

ΔABC आणि Δ DBE यांमध्ये,

बाजू AB ≅ बाजू DB .....(......................)

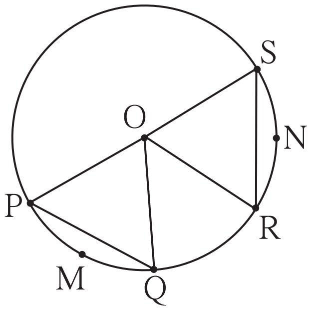
बाजू .... ≅ बाजू .....(......................)

∠ ABC ≅ ∠ DBE .....(एकरूप कंसांची व्याख्या)

∴ Δ ABC ≅ Δ DBE ..... (......................)

∴ जीवा AC ≅ जीवा DE .....(......................)

प्रमेय : एकाच वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळांच्या) एकरूप जीवांचे संगत कंस एकरूप असतात.



आकृती 3.34

पक्ष : रेख PQ आणि रेख RS ह्या केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या एकरूप जीवा आहेत.

साध्य : कंस PMQ ≅ कंस RNS

पुढील विचार लक्षात घेऊन सिद्धता लिहा. दोन कंस एकरूप असण्यासाठी त्यांच्या त्रिज्या आणि मापे समान असावी लागतात. कंस PMQ आणि कंस RNS हे एकाच वर्तुळाचे कंस असल्याने त्यांच्या त्रिज्या समान

आहेत. त्या कंसांची मापे, म्हणजे त्यांच्या संगत केंद्रीय कोनांची मापे होत. हे केंद्रीय कोन मिळण्यासाठी त्रिज्या OP, OQ, OR आणि OS काढाव्या लागतील. त्या काढल्यावर तयार होणारे Δ OPQ आणि Δ ORS हे एकरूप आहेत ना?

वरील दोन्ही प्रमेये तुम्ही एकरूप वर्तुळांसाठी सिद्ध करा.

विचार करूया

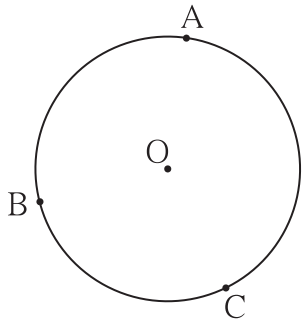
- वरील दोनपैकी पहिल्या प्रमेयात कंस APC आणि कंस DQE हे लघुकंस एकरूप मानले आहेत. त्यांचे संगत विशालकंस एकरूप मानूनही हे प्रमेय सिद्ध करता येईल का?
- दुसऱ्या प्रमेयात एकरूप जीवांचे संगत विशालकंसही एकरूप होतात का? जीवा PQ आणि जीवा RS हे व्यास असतानाही हे प्रमेय सत्य असते का?

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचे A, B, C हे तीन बिंदू आहेत.

(i) या तीन बिंदूंमुळे तयार होणाऱ्या सर्व कंसांची नावे लिहा.

(ii) कंस BC आणि कंस AB यांची मापे अनुक्रमे 110° आणि 125° असतील तर राहिलेल्या सर्व कंसांची मापे लिहा.



आकृती 3.35

उकल : (i) कंसांची नावे –

कंस AB, कंस BC, कंस AC, कंस ABC, कंस ACB, कंस BAC

(ii) कंस ABC चे माप = कंस AB चे माप + कंस BC चे माप

$= 125^\circ + 110^\circ = 235^\circ$

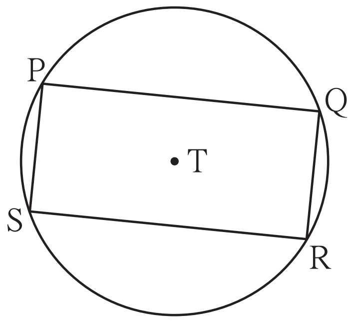
कंस AC चे माप = 360° – कंस ABC चे माप

$= 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$

त्याचप्रमाणे कंस ACB चे माप = $360^\circ - 125^\circ = 235^\circ$

आणि कंस BAC चे माप = $360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$

उदा. (2) आकृती 3.36 मध्ये केंद्र T असलेल्या वर्तुळात आयत PQRS अंतर्लिखित केला आहे.
तर दाखवा की –
(i) कंस PQ $\cong$ कंस SR
(ii) कंस SPQ $\cong$ कंस PQR



आकृती 3.36

उकल : $\square$ PQRS हा आयत आहे.

$\therefore$ जीवा PQ $\cong$ जीवा SR .... (आयताच्या संमुख बाजू)

$\therefore$ कंस PQ $\cong$ कंस SR ...... (एकरूप जीवांचे संगत कंस)

जीवा PS $\cong$ जीवा QR ..... (आयताच्या संमुख बाजू)

$\therefore$ कंस SP $\cong$ कंस QR ..... (एकरूप जीवांचे संगत कंस)

$\therefore$ कंस SP आणि कंस QR यांची मापे समान आहेत.

आता, कंस SP आणि कंस PQ यांच्या मापांची बेरीज

= कंस PQ आणि कंस QR यांच्या मापांची बेरीज

$\therefore$ कंस SPQ चे माप = कंस PQR चे माप

$\therefore$ कंस SPQ $\cong$ कंस PQR

हे लक्षात ठेवूया.

(1) ज्या कोनाचा शिरोबिंदू वर्तुळकेंद्रावर असतो त्या कोनाला केंद्रीय कोन म्हणतात.

(2) कंसाच्या मापाची व्याख्या – (i) लघुकंसाचे माप त्याच्या संगत केंद्रीय कोनाच्या मापाएवढे असते.
(ii) विशालकंसाचे माप = $360°$ – संगत लघुकंसाचे माप. (iii) अर्धवर्तुळकंसाचे माप $180°$ असते.

(3) दोन वर्तुळकंसांच्या त्रिज्या आणि मापे समान असतात तेव्हा ते कंस एकरूप असतात.

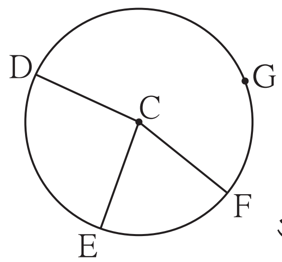
(4) एकाच वर्तुळाच्या कंस ABC आणि कंस CDE यांमध्ये जेव्हा C हा एकच बिंदू सामाईक असतो, तेव्हा
m(कंस ABC) + m(कंस CDE) = m(कंस ACE)

(5) एकाच वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळांच्या) एकरूप कंसांच्या संगत जीवा एकरूप असतात.

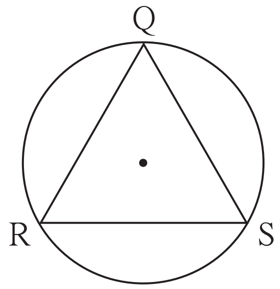
(6) एकाच वर्तुळाच्या (किंवा एकरूप वर्तुळांच्या) एकरूप जीवांचे संगत कंस एकरूप असतात.

सरावसंच 3.3

1. आकृती 3.37 मध्ये, केंद्र C असलेल्या वर्तुळावर G, D, E आणि F हे बिंदू आहेत. $\angle$ ECF चे माप $70°$ आणि कंस DGF चे माप $200°$ असेल, तर कंस DE आणि कंस DEF यांची मापे ठरवा.



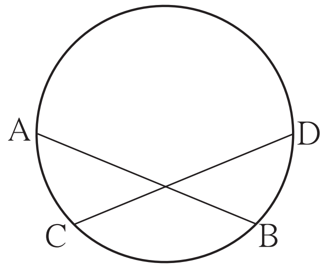
आकृती 3.37



आकृती 3.38

2★. आकृती 3.38 मध्ये Δ QRS समभुज आहे.
तर दाखवा की –
(1) कंस RS $\cong$ कंस QS $\cong$ कंस QR
(2) कंस QRS चे माप 240° आहे.

3. आकृती 3.39 मध्ये,
जीवा AB $\cong$ जीवा CD,
तर सिद्ध करा –
कंस AC $\cong$ कंस BD



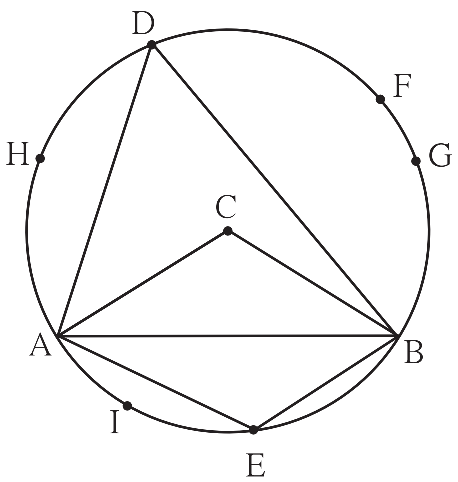
आकृती 3.39

जाणून घेऊया.

वर्तुळ आणि बिंदू, वर्तुळ आणि रेषा (स्पर्शिका) यांचा परस्परसंबंध असणारे काही गुणधर्म आपण पाहिले. आता वर्तुळ आणि कोन यांसंबंधीचे काही गुणधर्म आपण पाहू. यांतील काही गुणधर्म आधी कृतींतून माहीत करून घेऊ.

कृती I :

केंद्र C असलेले एक पुरेसे मोठे वर्तुळ काढा. आकृती 3.40 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे त्याची जीवा AB काढा. केंद्रीय कोन ACB काढा. जीवा AB मुळे झालेल्या विशालकंसावर बिंदू D आणि लघुकंसावर बिंदू E हे कोणतेही बिंदू घ्या.



आकृती 3.40

(1) $\angle$ADB आणि $\angle$ACB मोजा. त्यांच्या मापांची तुलना करा.
(2) $\angle$ADB आणि $\angle$AEB मोजा. आलेल्या मापांची बेरीज करून पाहा.

(3) कंस ADB वर F, G, H असे आणखी काही बिंदू घ्या. ∠AFB, ∠AGB, ∠AHB, ... यांची मापे मोजा. या मापांची ∠ADB च्या मापाशी आणि परस्परांशी तुलना करा.

(4) कंसAEB वर I हा आणखी एक कोणताही बिंदू घ्या. ∠ AIB मोजून त्याच्या मापाची ∠ AEB च्या मापाशी तुलना करा.

या कृतीतून तुम्हांला आलेले अनुभव असे असतील –

(1) ∠ ACB चे माप ∠ ADB च्या मापाच्या दुप्पट आहे.

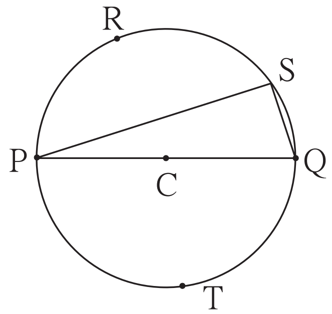
(2) ∠ ADB आणि ∠ AEB यांच्या मापांची बेरीज 180° आहे.

(3) ∠ AHB, ∠ ADB, ∠ AFB, ∠ AGB या सर्वांची मापे समान आहेत.

(4) ∠ AEB आणि ∠ AIB यांची मापे समान आहेत.

कृती II :

आकृती 3.41 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे केंद्र C असलेले पुरेसे मोठे वर्तुळ काढा. रेख PQ हा त्याचा कोणताही व्यास काढा. या व्यासामुळे तयार झालेल्या दोन्ही अर्धवर्तुळांवर R,S,T असे काही बिंदू घ्या. ∠PRQ, ∠PSQ, ∠PTQ मोजा. यांतील प्रत्येक कोन काटकोन आहे हे अनुभवा.



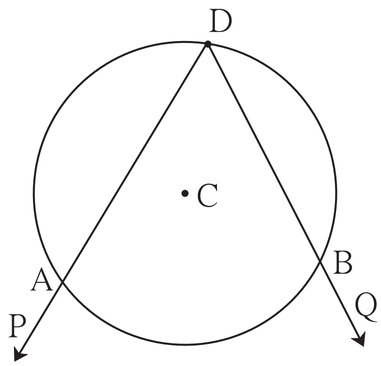
आकृती 3.41

वरील कृतींतून तुम्हांला आढळलेले गुणधर्म म्हणजे वर्तुळ आणि कोन यांसबंधीची प्रमेये आहेत. या प्रमेयांच्या सिद्‌धता आता आपण पाहू. त्यासाठी आधी काही संज्ञांची ओळख करून घ्यावी लागेल.

अंतर्लिखित कोन (Inscribed angle)

आकृती 3.42 मध्ये केंद्र C असलेले एक वर्तुळ आहे. ∠ PDQ चा शिरोबिंदू D या वर्तुळावर आहे. कोनाच्या भुजा DP आणि DQ वर्तुळाला अनुक्रमे A आणि B मध्ये छेदतात. अशा कोनाला वर्तुळात किंवा कंसात अंतर्लिखित केलेला कोन म्हणतात.

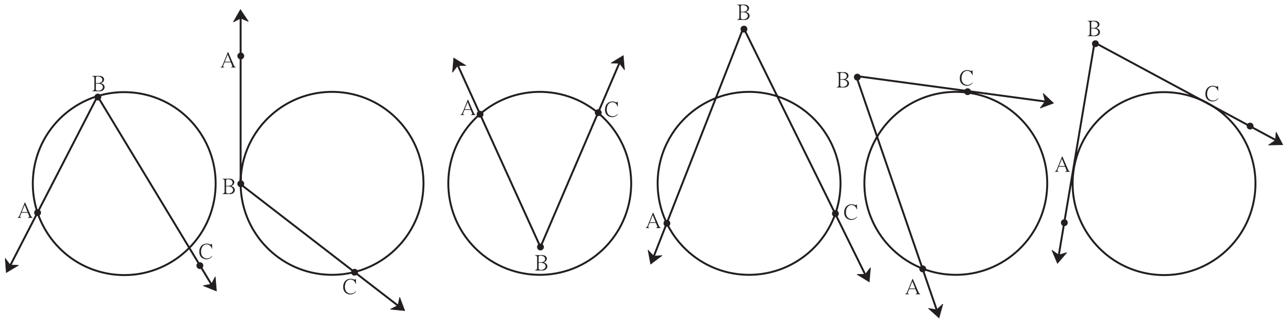
आकृती 3.42 मध्ये ∠ ADB हा कंस ADB मध्ये अंतर्लिखित आहे.



आकृती 3.42

अंतर्खंडित कंस (Intercepted arc)

पुढील आकृती 3.43 मधील (i) ते (vi) या सर्व आकृत्यांचे निरीक्षण करा.



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

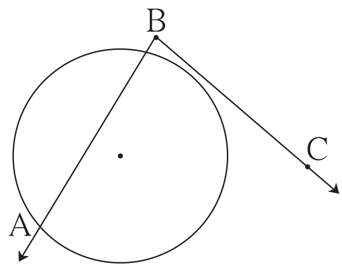
आकृती 3.43

प्रत्येक आकृतीतील ∠ ABC च्या अंतर्भागात येणाऱ्या वर्तुळकंसाला ∠ ABC ने अंतर्खंडित केलेला कंस म्हणतात. अंतर्खंडित कंसाचे अंत्यबिंदू हे वर्तुळ आणि कोन यांचे छेदन बिंदू असतात. कोनाच्या प्रत्येक बाजूवर कंसाचा एक अंत्यबिंदू असणे आवश्यक असते.

आकृती 3.43 मधील (i), (ii) व (iii) या आकृत्यांमध्ये कोनांनी प्रत्येकी एकच कंस अंर्खंडित केला आहे; तर (iv), (v) व (vi) मध्ये प्रत्येक कोनाने दोन कंस अंतर्खंडित केले आहेत.

आकृती (ii) व (v) मध्ये कोनाची एक भुजा आणि (vi) मध्ये कोनाच्या दोन्ही भुजा वर्तुळाला स्पर्श करतात, हेही लक्षात घ्या.

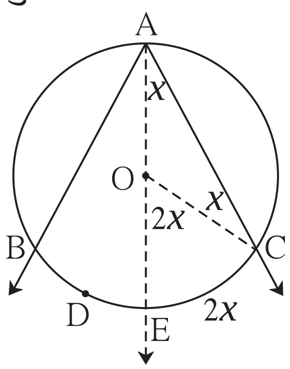
आकृती 3.44 मधील कंस हा अंतर्खंडित कंस नाही. कारण कोनाच्या BC या भुजेवर कंसाचा एकही अंत्यबिंदू नाही.



आकृती 3.44

अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय (Inscribed angle theorem)

प्रमेय : वर्तुळात अंतर्लिखित केलेल्या कोनाचे माप त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते.



आकृती 3.45

पक्ष : केंद्र O असलेल्या वर्तुळात, ∠BAC हा कंस BAC मध्ये अंतर्लिखित केला आहे. त्या कोनामुळे कंस BDC अंतर्खंडित झाला आहे.

साध्य : $\angle BAC = \frac{1}{2}\, m$(कंस BDC)

रचना : किरण AO काढला. वर्तुळाला तो बिंदू E मध्ये छेदतो. त्रिज्या OC काढली.

सिद्धता : Δ AOC मध्ये.

बाजू OA $\cong$ बाजू OC ...... (एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या)

$\therefore \angle OAC = \angle OCA$ ..... (समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

$\angle OAC = \angle OCA = x$ मानू. ...... (I)

आता, $\angle EOC = \angle OAC + \angle OCA$ .... (त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे प्रमेय)

$= x^\circ + x^\circ = 2x^\circ$

परंतु $\angle EOC$ हा केंद्रीय कोन आहे.

$\therefore$ m(कंस EC) = $2x^\circ$ .... (कंसाच्या मापाची व्याख्या) ..... (II)

$\therefore$ (I) व (II) वरून.

$\angle OAC = \angle EAC = \frac{1}{2}$ m(कंस EC) ..... (III)

याप्रमाणेच, त्रिज्या OB काढून, $\angle EAB = \frac{1}{2}$ m(कंस BE) हे सिद्ध करता येईल...... (IV)

$\therefore$ $\angle EAC + \angle EAB = \frac{1}{2}$ m(कंस EC) + $\frac{1}{2}$ m(कंस BE) .... (III) व (IV) वरून

$\therefore$ $\angle BAC = \frac{1}{2}$ [m(कंस EC) + m(कंस BE)]

$= \frac{1}{2}$ [m(कंसBEC)] $= \frac{1}{2}$ [m(कंस BDC)] ..... (V)

लक्षात घ्या, की वर्तुळात अंतर्लिखित केलेला कोन आणि वर्तुळकेंद्र यांसंबंधी तीन शक्यता संभवतात. वर्तुळकेंद्र कोनाच्या भुजेवर असेल, अंतर्भागात असेल किंवा बाह्यभागात असेल. यांपैकी पहिल्या दोन शक्यता (III) व (V) मध्ये सिद्ध झाल्या. आता राहिलेली तिसरी शक्यता विचारात घेऊ.

आकृती 3.46 मध्ये,

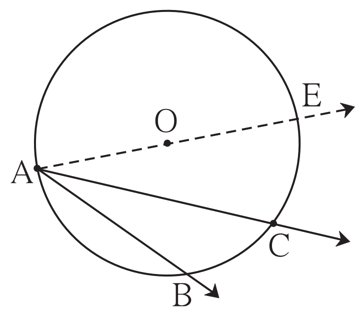
$\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE$

$= \frac{1}{2}$ m(कंस BCE) $- \frac{1}{2}$ m(कंस CE)

...... (III) वरून

$= \frac{1}{2}$ [m(कंस BCE) $-$ m(कंस CE)]

$= \frac{1}{2}$ [m(कंस BC)] ...... (VI)



आकृती 3.46

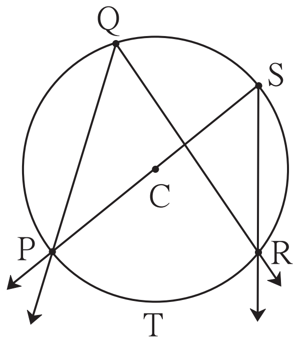
या प्रमेयाचे विधान पुढीलप्रमाणे सुद्धा लिहितात.

वर्तुळकंसाने वर्तुळाच्या कोणत्याही बिंदूशी अंतरित (subtended) केलेल्या कोनाचे माप त्याच कंसाने वर्तुळकेंद्राशी अंतरित केलेल्या कोनाच्या मापाच्या निम्मे असते.

या प्रमेयाच्या पुढील उपप्रमेयांची विधानेही या परिभाषेत लिहिता येतील.

अंतर्लिखित कोनाच्या प्रमेयाची उपप्रमेये (Corollaries of inscribed angle theorem)

1. एकाच कंसात अंतर्लिखित झालेले सर्व कोन एकरूप असतात.



आकृती 3.47

आकृती 3.47 च्या आधारे पक्ष आणि साध्य लिहा.

पुढील प्रश्नांचा विचार करून सिद्धता लिहा.

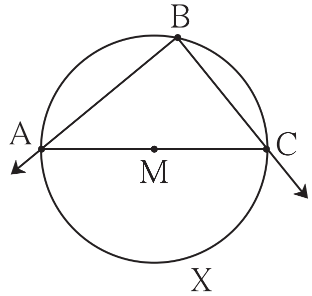
(1) $\angle$ PQR ने कोणता कंस अंतर्खंडित केला आहे?

(2) $\angle$ PSR ने कोणता कंस अंतर्खंडित केला आहे?

(3) अंतर्लिखित कोनाचे माप आणि त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाचे माप यांतील संबंध कसा असतो?

2. अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित झालेला कोन काटकोन असतो.

सोबतच्या आकृती 3.48 च्या आधारे या प्रमेयाचे पक्ष, साध्य आणि सिद्धता लिहा.



आकृती 3.48

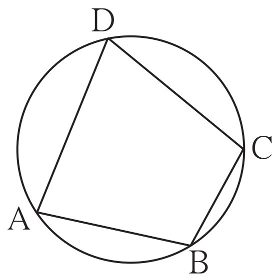
चक्रीय चौकोन (Cyclic quadrilateral)

चौकोनाचे चारही शिरोबिंदू एकाच वर्तुळावर असतील तर त्या चौकोनाला चक्रीय चौकोन म्हणतात.

चक्रीय चौकोनाचे प्रमेय (Theorem of cyclic quadrilateral)

प्रमेय : चक्रीय चौकोनाचे संमुख कोन परस्परांचे पूरककोन असतात.

पुढे दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.



आकृती 3.49

पक्ष : □ [ ] हा चक्रीय आहे.

साध्य : $\angle B + \angle D =$ [ ]

[ ] $+ \angle C = 180^\circ$

सिद्धता : $\angle$ ADC हा अंतर्लिखित कोन असून त्याने कंस ABC अंतर्खंडित केला आहे.

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}$ [ ] .... (I)

तसेच [ ] हा अंतर्लिखित कोन असून त्याने कंस ADC अंतर्खंडित केला आहे.

$\therefore$ $\square$ $= \frac{1}{2}$ m(कंस ADC) ..... (II)

$\therefore \angle ADC +$ $\square$ $= \frac{1}{2}$ $\square$ $+ \frac{1}{2}$ m(कंस ADC) ..... [(I) व (II) वरून]

$= \frac{1}{2}$ [$\square$ + m(कंस ADC)]

$= \frac{1}{2} \times 360^\circ$ .... [कंस ABC आणि कंस ADC मिळून पूर्ण वर्तुळ होते.]

$=$ $\square$

त्याचप्रमाणे $\angle A + \angle C =$ $\square$ हे सिद्‌ध करता येईल.

चक्रीय चौकोनाच्या प्रमेयाचे उपप्रमेय (Corollary of cyclic quadrilateral theorem)

प्रमेय : **चक्रीय चौकोनाचा बाह्यकोन त्याच्या संलग्न कोनाच्या संमुख कोनाशी एकरूप असतो.**

या प्रमेयाची सिद्‌धता तुम्ही लिहा.

विचार करूया

वरील प्रमेयात $\angle B + \angle D = 180^\circ$ हे सिद्ध केल्यावर उरलेल्या संमुख कोनांच्या मापांची बेरीजही 180° आहे, हे अन्य प्रकारे सिद्‌ध करता येईल का?

चक्रीय चौकोनाच्या प्रमेयाचा व्यत्यास (Converse of cyclic quadrilateral theorem)

प्रमेय : **चौकोनाचे संमुख कोन पूरक असतील तर तो चौकोन चक्रीय असतो.**

हे प्रमेय अप्रत्यक्ष पद्‌धतीने सिद्‌ध करता येते. तुम्ही प्रयत्न करा.

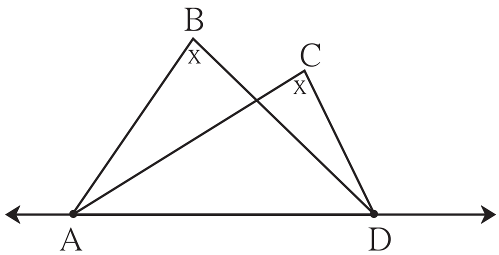
वरील व्यत्यासावरून आपल्या असे लक्षात येते, की चौकोनाचे संमुख कोन जर पूरक असतील तर त्या चौकोनाचे परिवर्तुळ असते.

प्रत्येक त्रिकोणाचे एक परिवर्तुळ असते, हे आपल्याला माहीत आहे, परंतु प्रत्येक चौकोनाचे परिवर्तुळ असतेच असे नाही, हे तुम्ही अनुभवा.

कोणती अट पूर्ण झाली असता चौकोनाचे परिवर्तुळ असते, म्हणजेच चौकोनाचे शिरोबिंदू एकाच वर्तुळावर असतात हे वरील प्रमेयाने आपल्याला समजते.

आणखी एका वेगळ्या परिस्थितीत चार नैकरेषीय बिंदू चक्रीय असतात. हे पुढील प्रमेयात सांगितले आहे.

प्रमेय : रेषेचे दोन भिन्न बिंदू, त्या रेषेच्या एकाच बाजूला असणाऱ्या दोन भिन्न बिंदूंशी एकरूप कोन निश्चित करत असतील, तर ते चार बिंदू एकाच वर्तुळावर असतात.



आकृती 3.50

पक्ष : बिंदू B व C हे रेषा AD च्या एकाच बाजूला आहेत. $\angle ABD \cong \angle ACD$

साध्य : बिंदू A, B, C, D एकाच वर्तुळावर आहेत. (म्हणजेच □ ABCD चक्रीय आहे.)

याची देखील अप्रत्यक्ष सिद्धता देता येते.

विचार करूया

वरील प्रमेय कोणत्या प्रमेयाचा व्यत्यास आहे ?

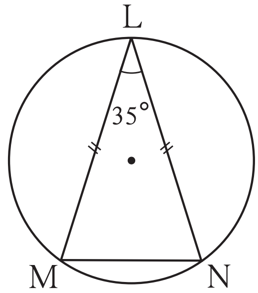
सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) आकृती 3.51 मध्ये, जीवा LM $\cong$ जीवा LN

$\angle L = 35^\circ$ तर

(i) m(कंस MN) = किती ?

(ii) m(कंस LN) = किती ?



आकृती 3.51

उकल : (i) $\angle L = \frac{1}{2}$ m(कंस MN) ...... (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$\therefore$ $35 = \frac{1}{2}$ m(कंस MN)

$\therefore$ $2 \times 35 =$ m(कंस MN) $= 70^\circ$

(ii) m(कंस MLN) $= 360^\circ -$ m(कंस MN) ...... (कंसाच्या मापाची व्याख्या)

$= 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$

आता, जीवा LM $\cong$ जीवा LN

$\therefore$ कंस LM $\cong$ कंस LN

परंतु m(कंस LM) + m(कंस LN) = m(कंस MLN) $= 290^\circ$ ..... (कंसाच्या बेरजेचा गुणधर्म)

m(कंस LM) = m(कंस LN) $= \frac{290^\circ}{2} = 145^\circ$

किंवा, (ii) जीवा LM $\cong$ जीवा LN

$\therefore$ $\angle M = \angle N$ ...... (समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

$\therefore$ $2\angle M = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$

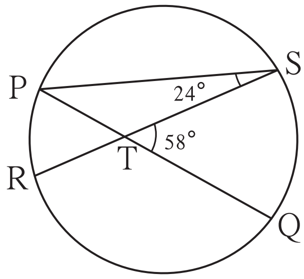
$\therefore$ $\angle M = \frac{145^\circ}{2}$

$\therefore$ m(कंस LN) = $2 \times \angle M$ .... (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$= 2 \times \frac{145^\circ}{2}$

$= 145^\circ$

उदा. (2) आकृती 3.52 मध्ये, जीवा PQ आणि जीवा RS एकमेकींना बिंदू T मध्ये छेदतात.



आकृती 3.52

(i) जर $\angle STQ = 58^\circ$ आणि $\angle PSR = 24^\circ$, तर m(कंस SQ) काढा.

(ii) $\angle STQ = \frac{1}{2}$ [m(कंस PR) + m(कंस SQ)] हे पडताळून पाहा.

(iii) जीवा PQ आणि जीवा RS यांमधील कोनाचे माप कोणतेही असले तरी $m\angle STQ = \frac{1}{2}$ [m(कंस PR) + m(कंस SQ)] हे सिद्ध करा.

(iv) या उदाहरणात सिद्ध होणारा गुणधर्म शब्दांत लिहा.

उकल: (i) $\angle SPQ = \angle SPT = 58^\circ - 24^\circ = 34^\circ$ .... (त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे प्रमेय)

m(कंस QS) = $2 \angle SPQ = 2 \times 34^\circ = 68^\circ$

(ii) m(कंस PR) = $2 \angle PSR = 2 \times 24^\circ = 48^\circ$

आता, $\frac{1}{2}$ [m(कंस PR) + m(कंस SQ)] = $\frac{1}{2}$ [48 + 68]

$= \frac{1}{2} \times 116 = 58^\circ$

$= \angle STQ$

(iii) या गुणधर्माच्या सिद्धतेतील रिकाम्या चौकटी भरून ती पूर्ण करा.

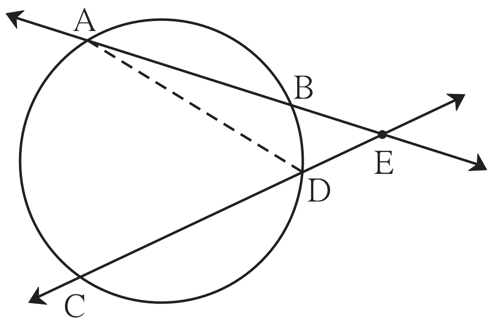
$\angle STQ = \angle SPQ$ + [ ] .... (त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे प्रमेय)

$= \frac{1}{2}$ m(कंस SQ) + [ ] .... (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

$= \frac{1}{2}$ [[ ] + [ ]]

(iv) वर्तुळाच्या जीवा एकमेकींना वर्तुळाच्या अंतर्भागात छेदत असतील तर त्या जीवांमधील कोनाचे माप, त्या कोनाने अंतर्खंडित केलेला कंस आणि त्याच्या विरुद्ध कोनाने अंतर्खंडित केलेला कंस, यांच्या मापांच्या बेरजेच्या निम्मे असते.

उदा. (3) वर्तुळाच्या जीवांना सामावणाऱ्या रेषा वर्तुळाच्या बाह्यभागात छेदत असतील तर त्या रेषांमधील कोनाचे माप, त्या कोनाने अंतर्खंडित केलेल्या कंसांच्या मापांच्या फरकाच्या निम्मे असते, हे सिद्ध करा.



आकृती 3.53

पक्ष : वर्तुळाच्या जीवा AB आणि जीवा CD त्या वर्तुळाच्या बाह्यभागात बिंदू E मध्ये छेदतात.

साध्य : $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{कंस } AC) - m(\text{कंस } BD)]$

रचना : रेख AD काढला.

सिद्धता : या गुणधर्माची सिद्धता, वरील उदा. (2) मध्ये दिलेल्या सिद्धतेप्रमाणेच देता येते. त्यासाठी Δ AED चे कोन, त्या त्रिकोणाचाबाह्यकोन इत्यादी विचारात घ्या आणि सिद्धता लिहून काढा.

हे लक्षात ठेवूया.

(1) वर्तुळात अंतर्लिखित केलेल्या कोनाचे माप, त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते.

(2) वर्तुळाच्या एकाच कंसात अंतर्लिखित केलेले कोन एकरूप असतात.

(3) अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित केलेला कोन काटकोन असतो.

(4) चौकोनाचे चारही शिरोबिंदू एकाच वर्तुळावर असतील तर त्या चौकोनाला चक्रीय चौकोन म्हणतात.

(5) चक्रीय चौकोनाचे संमुख कोन पूरक असतात.

(6) चक्रीय चौकोनाचा बाह्यकोन त्याच्या संलग्न-संमुख कोनाशी एकरूप असतो.

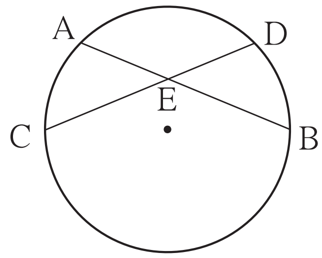
(7) चौकोनाचे संमुख कोन परस्परपूरक असतील तर तो चौकोन चक्रीय असतो.

(8) रेषेचे दोन भिन्न बिंदू, त्या रेषेच्या एकाच बाजूला असणाऱ्या दोन भिन्न बिंदूंशी एकरूप कोन निश्चित करत असतील, तर ते चार बिंदू एकाच वर्तुळावर असतात.

(9) सोबतच्या आकृती 3.54 मध्ये,

(i) $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{कंस } AC) + m(\text{कंस } DB)]$

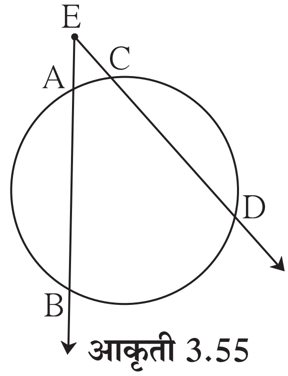
(ii) $\angle CEB = \frac{1}{2}[m(\text{कंस } AD) + m(\text{कंस } CB)]$



आकृती 3.54

(10) सोबतच्या आकृती 3.55 मध्ये,

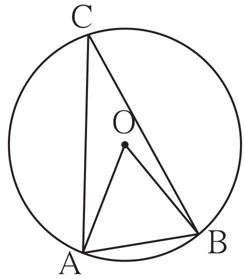
$\angle BED = \frac{1}{2}$ [m(कंस BD) – m(कंस AC)]



आकृती 3.55

सरावसंच 3.4

1. आकृती 3.56 मध्ये, केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या जीवा AB ची लांबी वर्तुळाच्या त्रिज्येएवढी आहे. तर (1) ∠AOB (2) ∠ACB (3) कंस AB आणि (4) कंस ACB यांची मापे काढा.



आकृती 3.56

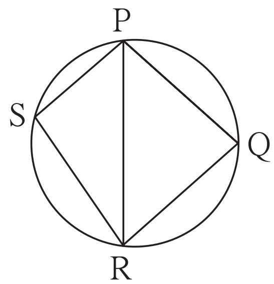
2. आकृती 3.57 मध्ये, □ PQRS हा चक्रीय आहे. बाजू PQ ≅ बाजू RQ. ∠PSR = 110°, तर

(1) ∠PQR = किती ?

(2) m(कंस PQR) = किती ?

(3) m(कंस QR) = किती ?

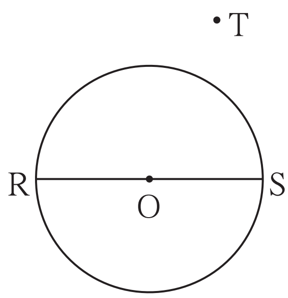
(4) ∠PRQ = किती ?



आकृती 3.57

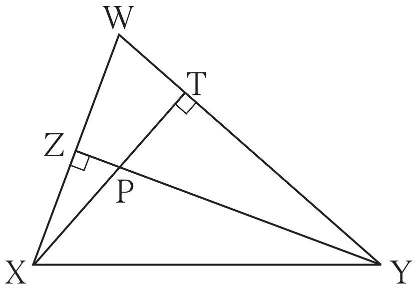
3. चक्रीय □ MRPN मध्ये, ∠R = $(5x - 13)^\circ$ आणि ∠N = $(4x + 4)^\circ$, तर ∠R आणि ∠N यांची मापे ठरवा.

4. आकृती 3.58 मध्ये रेख RS हा केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा व्यास आहे. बिंदू T हा वर्तुळाच्या बाह्य-भागातील बिंदू आहे. तर दाखवा, की ∠RTS हा लघुकोन आहे.



आकृती 3.58

5. कोणताही आयत हा चक्रीय चौकोन असतो हे सिद्ध करा.



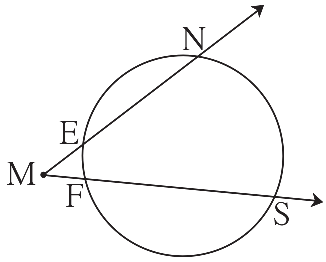
आकृती 3.59

6. आकृती 3.59 मध्ये, रेख YZ आणि रेख XT हे Δ WXY चे शिरोलंब बिंदू P मध्ये छेदतात तर सिद्ध करा,

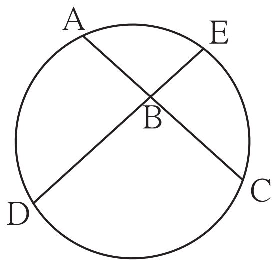
(1) □ WZPT हा चक्रीय आहे.

(2) बिंदू X, Z, T, Y एकाच वर्तुळावर आहेत.

7. आकृती 3.60 मध्ये m(कंस NS) = 125°, m(कंस EF) = 37°, तर $\angle$NMS चे माप काढा.



आकृती 3.60

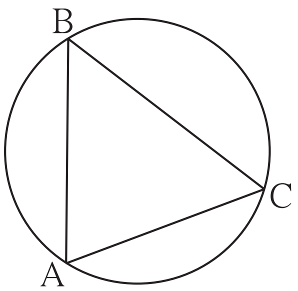


आकृती 3.61

8. आकृती 3.61 मध्ये जीवा AC आणि जीवा DE बिंदू B मध्ये छेदतात. जर $\angle$ABE = 108° आणि m(कंस AE) = 95° तर m(कंस DC) काढा.

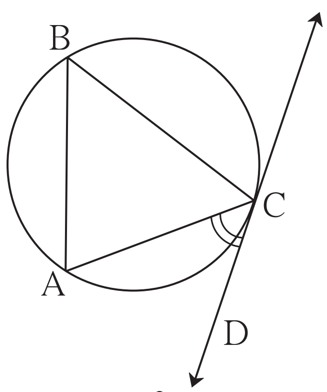
कृती :

एक पुरेसे मोठे वर्तुळ काढा. आकृती 3.62 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे या वर्तुळाची रेख AC ही एक जीवा काढा. वर्तुळावर B हा कोणताही बिंदू घ्या. $\angle$ABC हा अंतर्लिखित कोन काढा. $\angle$ABC चे माप मोजा व नोंदवून ठेवा.



आकृती 3.62

आता, आकृती 3.63 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे त्याच वर्तुळाची रेषा CD ही स्पर्शिका काढा. $\angle$ACD चे माप मोजा.



आकृती 3.63

$\angle$ACD चे माप, $\angle$ABC च्या मापाएवढेच आहे. असे तुम्हांला आढळेल.

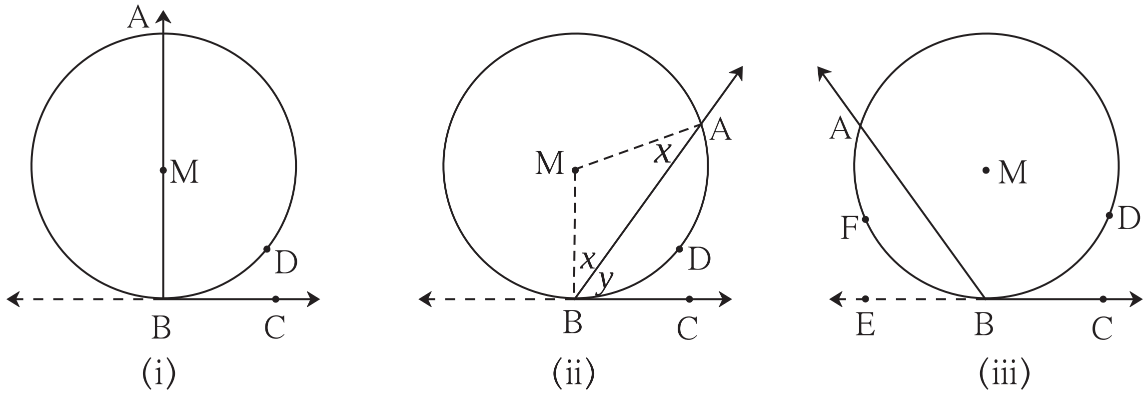
$\angle ABC = \frac{1}{2}$ m(कंस AC) हे तुम्हांला माहीत आहे.

यावरून $\angle$ACD चे माप सुद्धा (कंस AC) च्या मापाच्या निम्मे आहे हा निष्कर्ष मिळतो.

वर्तुळाच्या स्पर्शिकेचा हाही एक महत्त्वाचा गुणधर्म आहे. तो आपण आता सिद्ध करू.

स्पर्शिका–छेदिका कोनाचे प्रमेय (Theorem of angle between tangent and secant)

प्रमेय : **शिरोबिंदू वर्तुळावर असलेल्या कोनाची एक भुजा वर्तुळाची स्पर्शिका असेल आणि दुसरी भुजा वर्तुळाला आणखी एका बिंदूत छेदत असेल, तर त्या कोनाचे माप त्याने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते.**



आकृती 3.64

पक्ष : $\angle$ ABC चा शिरोबिंदू केंद्र M असलेल्या वर्तुळावर आहे. त्याची भुजा BC वर्तुळाला स्पर्श करते आणि भुजा BA वर्तुळाला बिंदू A मध्ये छेदते. कंस ADB हा $\angle$ ABC ने अंतर्खंडित केला आहे.

साध्य : $\angle ABC = \frac{1}{2}$ m(कंसADB)

सिद्धता : या प्रमेयाची सिद्धता, तीन शक्यता विचारात घेऊन द्यावी लागेल.

(1) आकृती 3.64 (i) प्रमाणे वर्तुळकेंद्र M हे $\angle$ ABC च्या एका भुजेवर असल्यास,

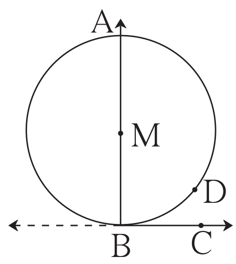
$\angle ABC = \angle MBC = 90^\circ$ ..... (स्पर्शिकेचे प्रमेय).....(I)

कंस ADB हे अर्धवर्तुळ आहे.

$\therefore$ m(कंस ADB) = 180° ..... (कंसाच्या मापाची व्याख्या).....(II)

(I) व (II) वरून

$\angle ABC = \frac{1}{2}$ m(कंसADB)



आकृती 3.64(i)

(2) आकृती 3.64 (ii) प्रमाणे केंद्र M हे $\angle$ ABC च्या बाह्यभागात असल्यास,

त्रिज्या MA आणि त्रिज्या MB काढू.

आता, $\angle MBA = \angle MAB$ ..... (समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय)

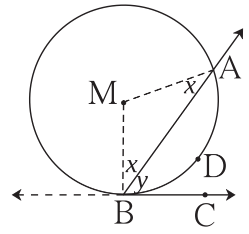
तसेच, $\angle MBC = 90^\circ$ ..... (स्पर्शिकेचे प्रमेय) ..... (I)

$\angle$ MBA = $\angle$ MAB = x, $\angle$ ABC = y मानू.

$\angle$ AMB = 180 − ($x + x$) = 180 − 2x

$\angle$ MBC = $\angle$ MBA + $\angle$ ABC = $x + y$

$\therefore x + y = 90^\circ$ $\therefore 2x + 2y = 180^\circ$



आकृती 3.64(ii)

Δ AMB मध्ये $2x + \angle AMB = 180^\circ$

$\therefore 2x + 2y = 2x + \angle AMB$

$\therefore 2y = \angle AMB$

$\therefore y = \angle ABC = \frac{1}{2}\angle AMB = \frac{1}{2}$ m(कंस ADB)

(3) तिसऱ्या शक्यतेबाबत खाली दिलेली सिद्धता आकृती 3.64 (iii) च्या आधारे, तुम्ही पूर्ण करा.

किरण [ ] हा किरण BC चा विरुद्ध किरण काढला.

आता, $\angle ABE = \frac{1}{2}$ m([ ]) ...... (2) मध्ये सिद्ध.

180 − [ ] = $\angle$ABE ..... (रेषीय जोडीतील कोन)

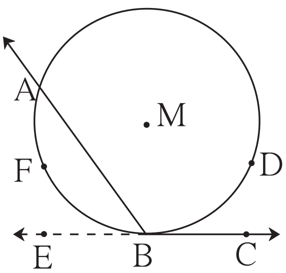
$\therefore$ 180 − [ ] = $\frac{1}{2}$ m(कंस AFB)

= $\frac{1}{2}$ [360 − m([ ])]

$\therefore 180 - \angle ABC = 180 - \frac{1}{2}$ m(कंस ADB)

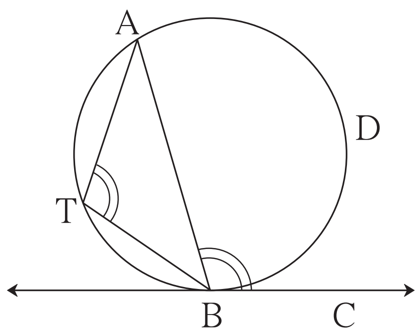
$\therefore -\angle ABC = -\frac{1}{2}$ m([ ])

$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2}$ m(कंस ADB)



आकृती 3.64(iii)

स्पर्शिका – छेदिका कोनाच्या प्रमेयाचे पर्यायी विधान



आकृती 3.65

आकृतीत AB ही वृत्तछेदिका आणि BC स्पर्शिका आहे. कंस ADB हा $\angle$ ABC ने अंतर्खंडित केलेला कंस आहे. जीवा AB वर्तुळाचे दोन कंसांत विभाजन करते. दोन्ही कंस परस्परांचे विरुद्ध कंस असतात. आता कंस ADB च्या विरुद्ध कंसावर T बिंदू घेतला. वरील प्रमेयावरून,

$\angle$ ABC = $\frac{1}{2}$ m (कंस ADB) = $\angle$ ATB.

$\therefore$ वर्तुळाची स्पर्शिका व स्पर्शबिंदूतून काढलेली जीवा यांतील कोन त्या कोनाने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या विरुद्ध कंसात अंतर्लिखित केलेल्या कोनाएवढा असतो.

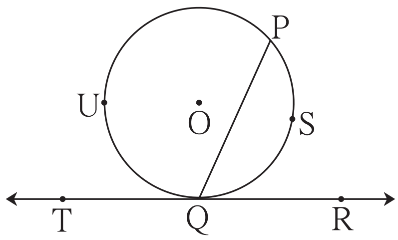
स्पर्शिका-छेदिका कोनांच्या प्रमेयाचा व्यत्यास

वर्तुळाच्या जीवेच्या एका अंत्यबिंदूतून जाणारी एक रेषा काढली असता, त्या रेषेने त्या जीवेशी केलेल्या कोनाचे माप त्या कोनाने अंतर्खंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असेल, तर ती रेषा त्या वर्तुळाची स्पर्शिका असते.

आकृती 3.66 मध्ये,

जर $\angle PQR = \frac{1}{2}\, m($कंस PSQ$)$ असेल,

[किंवा $\angle PQT = \frac{1}{2}\, m($कंस PUQ$)$ असेल,]



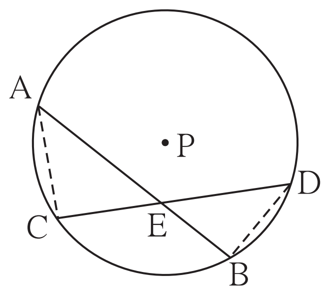
आकृती 3.66

तर रेषा TR ही वर्तुळाची स्पर्शिका असते. या व्यत्यास प्रमेयाचा उपयोग, वर्तुळाला स्पर्शिका काढण्याच्या एका रचनेसाठी होतो. या प्रमेयाची अप्रत्यक्ष सिद्धता देता येते.

जीवांच्या अंतर्छेदनाचे प्रमेय (Theorem of internal division of chords)

एकाच वर्तुळाच्या दोन जीवा जेव्हा वर्तुळाच्या अंतर्भागात छेदतात, तेव्हा एका जीवेच्या झालेल्या दोन भागांच्या लांबींचा गुणाकार हा दुसऱ्या जीवेच्या दोन भागांच्या लांबींच्या गुणाकाराएवढा असतो.

पक्ष : केंद्र P असलेल्या वर्तुळाच्या जीवा AB आणि जीवा CD, वर्तुळाच्या अंतर्भागात बिंदू E मध्ये छेदतात.



आकृती 3.67

साध्य : $AE \times EB = CE \times ED$

रचना : रेख AC आणि रेख DB काढले.

सिद्धता : Δ CAE आणि Δ BDE मध्ये,

$\angle AEC \cong \angle DEB$ ..... (विरुद्ध कोन)

$\angle CAE \cong \angle BDE$ ..... (एकाच वर्तुळकंसात अंतर्लिखित कोन)

$\therefore \Delta CAE \sim \Delta BDE$ ..... (को- को समरूपता कसोटी)

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$ ..... (समरूप त्रिकोणांच्या संगत भुजा)

$\therefore AE \times EB = CE \times ED$

विचार करूया.

आकृती 3.67 मध्ये रेख AC आणि रेख DB काढून आपण प्रमेय सिद्ध केले. त्याऐवजी रेख AD आणि रेख CB काढून हे प्रमेय सिद्ध करता येईल का ?

अधिक माहितीसाठी

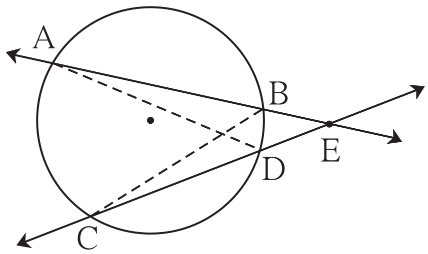
आकृती 3.67 मधील AB या जीवेचे बिंदू E मुळे AE आणि EB हे दोन भाग झाले आहेत. रेख AE आणि रेख EB या लगतच्या बाजू असणारा आयत काढला, तर AE × EB हे त्या आयताचे क्षेत्रफळ असेल. तसेच CE × ED हे जीवा CD च्या दोन भागांनी होणाऱ्या आयताचे क्षेत्रफळ असेल. आपण AE × EB = CE × ED हे सिद्ध केले.

म्हणून हे प्रमेय वेगळ्या शब्दांत पुढीलप्रमाणेही मांडतात.

एकाच वर्तुळाच्या दोन जीवा वर्तुळाच्या अंतर्भागात छेदत असतील, तर एका जीवेच्या दोन भागांनी होणाऱ्या आयताचे क्षेत्रफळ हे दुसऱ्या जीवेच्या दोन भागांनी होणाऱ्या आयताच्या क्षेत्रफळाएवढे असते.

जीवांच्या बाह्यछेदनाचे प्रमेय (Theorem of external division of chords)

एकाच वर्तुळाच्या AB आणि CD या जीवांना सामावणाऱ्या वृत्तछेदिका परस्परांना वर्तुळाच्या बाह्यभागातील बिंदू E मध्ये छेदत असतील, तर AE × EB = CE × ED.



आकृती 3.68

प्रमेयाचे वरील विधान व आकृतीच्या आधारे पक्ष व साध्य तुम्ही ठरवा.

रचना : रेख AD आणि रेख BC काढले.

रिकाम्या जागा भरून सिद्धता पूर्ण करा.

सिद्धता : Δ ADE आणि Δ CBE मध्ये,

$\angle$ AED ≅ [ ] .... (सामाईक कोन)

$\angle$ DAE ≅ $\angle$ BCE .... ([ ])

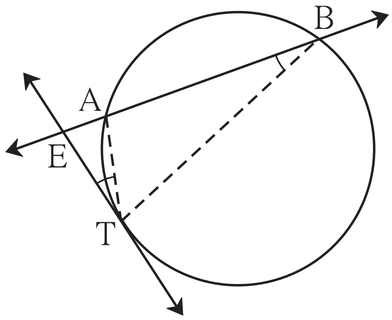
∴ Δ ADE ~ [ ] .... ([ ])

$\therefore \dfrac{(AE)}{[\ \ ]} = \dfrac{[\ \ ]}{[\ \ ]}$ .... (समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू)

∴ [ ] = CE × ED

स्पर्शिका छेदिका रेषाखंडांचे प्रमेय (Tangent secant segments theorem)

वर्तुळाच्या बाह्यभागातील E ह्या बिंदूतून काढलेली वृत्तछेदिका वर्तुळाला बिंदू A व B मध्ये छेदत असेल आणि त्याच बिंदूतून जाणारी स्पर्शिका वर्तुळाला बिंदू T मध्ये स्पर्श करत असेल, तर $EA \times EB = ET^2$



आकृती 3.69

प्रमेयाचे वरील विधान लक्षात घेऊन पक्ष आणि साध्य ठरवा.

रचना : रेख TA आणि रेख TB काढले.

सिद्धता : Δ EAT आणि Δ ETB मध्ये,

$\angle AET \cong \angle TEB$ .... (समाईक कोन)

$\angle ETA \cong \angle EBT$.. (स्पर्शिका-छेदिका प्रमेय)

$\therefore \Delta EAT \sim \Delta ETB$ ..... (को-को समरूपता)

$\therefore \frac{ET}{EB} = \frac{EA}{ET}$ ..... (समरूप त्रिकोणांच्या संगत बाजू)

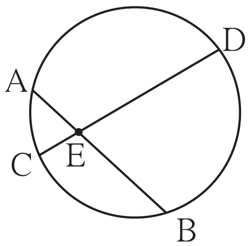
$\therefore EA \times EB = ET^2$

हे लक्षात ठेवूया.

(1) आकृती 3.70 नुसार,

$AE \times EB = CE \times ED$

या गुणधर्माला जीवा अंतर्छेदनाचे प्रमेय म्हणतात.

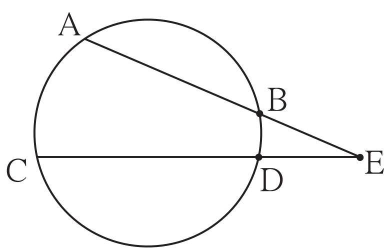


आकृती 3.70

(2) आकृती 3.71 नुसार,

$AE \times EB = CE \times ED$

या गुणधर्माला जीवा बाह्यछेदनाचे प्रमेय म्हणतात.

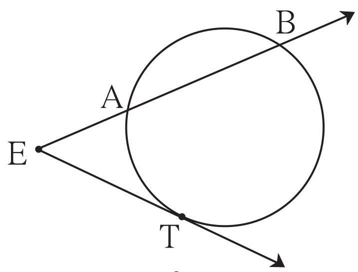


आकृती 3.71

(3) आकृती 3.72 नुसार,

$EA \times EB = ET^2$

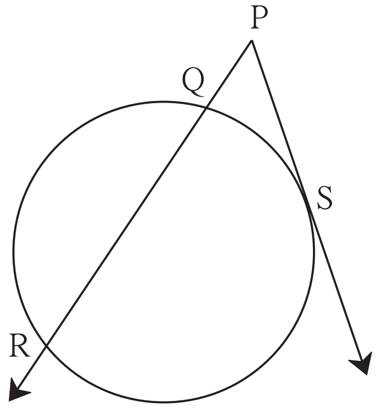
या गुणधर्माला स्पर्शिका-छेदिका रेषाखंडांचे प्रमेय म्हणतात.



आकृती 3.72

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) आकृती 3.73 मध्ये, रेख PS हा स्पर्शिकाखंड आहे. रेषा PR ही वृत्तछेदिका आहे. जर PQ = 3.6, QR = 6.4 तर PS काढा.



आकृती 3.73

उकल : $PS^2 = PQ \times PR$ .... (स्पर्शिका छेदिका रेषाखंडाचे प्रमेय)

$= PQ \times (PQ + QR)$

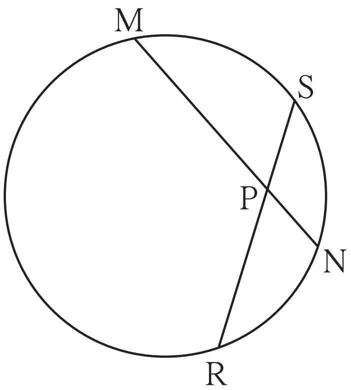
$= 3.6 \times [3.6 + 6.4]$

$= 3.6 \times 10$

$= 36$

$\therefore PS = 6$

उदा. (2) आकृती 3.74 मध्ये, जीवा MN आणि जीवा RS परस्परांना बिंदू P मध्ये छेदतात. जर PR = 6, PS = 4, MN = 11 तर PN काढा.



आकृती 3.74

उकल : जीवांच्या अंतर्छेदनाच्या प्रमेयावरून,

$PN \times PM = PR \times PS$... (I)

PN = x मानू. $\therefore PM = 11 - x$

या किमती (I) मध्ये मांडून,

$x\,(11 - x) = 6 \times 4$

$\therefore\ 11x - x^2 - 24 = 0$

$\therefore\ x^2 - 11x + 24 = 0$

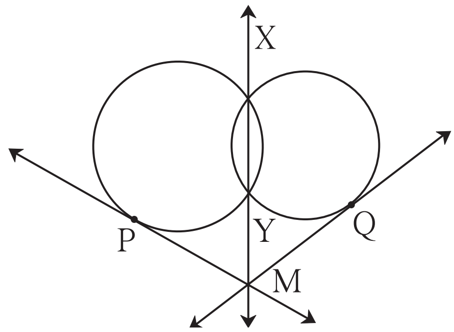
$\therefore\ (x - 3)\,(x - 8) = 0$

$\therefore\ x - 3 = 0$ किंवा $x - 8 = 0$

$\therefore\ x = 3$ किंवा $x = 8$

$\therefore$ PN = 3 किंवा PN = 8

उदा. (3) आकृती 3.75 मध्ये, दोन वर्तुळे एकमेकांना बिंदू X व Y मध्ये छेदतात. रेषा XY वरील बिंदू M मधून काढलेल्या स्पर्शिका त्या वर्तुळांना बिंदू P व Q मध्ये स्पर्श करतात. तर सिद्ध करा, रेख PM $\cong$ रेख QM.



आकृती 3.75

सिद्धता : रिकाम्या जागा भरून सिद्धता लिहा.

रेषा MX ही दोन्ही वर्तुळांची सामाईक .... आहे.

$\therefore PM^2 = MY \times MX$ ..... (I)

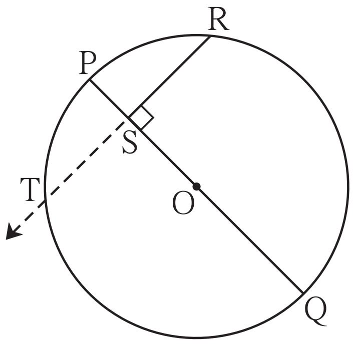
तसेच .... = ... × .... , (स्पर्शिका-छेदिका रेषाखंडाचे प्रमेय) ..... (II)

$\therefore$ (I) व (II) वरून ...... = QM^2

$\therefore$ PM =QM

रेख PM $\cong$ रेख QM

उदा. (4)



आकृती 3.76

आकृती 3.76 मध्ये, रेख PQ हा केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा व्यास आहे. बिंदू R हा वर्तुळावरील कोणताही बिंदू आहे.

रेख RS $\perp$ रेख PQ.

तर सिद्ध करा - SR हा PS आणि SQ यांचा भूमितीमध्य आहे.

[म्हणजेच $SR^2 = PS \times SQ$]

उकल : पुढे दिलेल्या पायऱ्यांनी सिद्धता लिहा.

(1) किरण RS काढा. तो वर्तुळाला ज्या बिंदूत छेदेल त्या बिंदूला T हे नाव द्या.

(2) RS = TS दाखवा.

(3)जीवांच्या अंतर्छेदनाचे प्रमेय वापरून समानता लिहा.

(4) RS = TS वापरून साध्य सिद्ध करा.

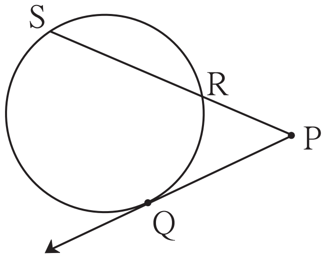
विचार करूया.

(1) वरील आकृती 3.76 मध्ये रेख PR आणि रेख RQ काढल्यास Δ PRQ कोणत्या प्रकारचा होईल ?

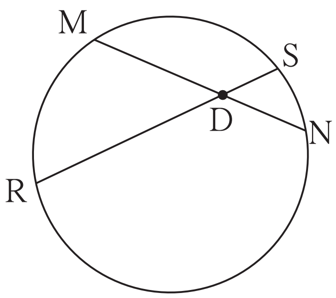
(2) वरील उदा. (4) मध्ये सिद्ध केलेला गुणधर्म याआधीही वेगळ्या रीतीने सिद्ध केला आहे का ?

सरावसंच 3.5

1. आकृती 3.77 मध्ये, बिंदू Q हा स्पर्शबिंदू आहे. जर PQ = 12, PR = 8, तर PS = किती? RS = किती?



आकृती 3.77



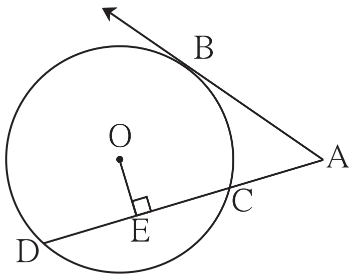
आकृती 3.78

2. आकृती 3.78 मध्ये, जीवा MN आणि RS एकमेकींना बिंदू D मध्ये छेदतात.

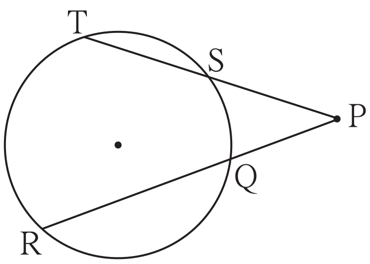
(1) जर RD = 15, DS = 4, MD = 8 तर DN = किती?

(2) जर RS = 18, MD = 9, DN = 8 तर DS = किती?

3. आकृती 3.79 मध्ये, बिंदू B हा स्पर्शबिंदू आणि बिंदू O वर्तुळकेंद्र आहे. रेख OE ⊥ रेषा AD, AB = 12, AC = 8, तर (1) AD (2) DC आणि (3) DE काढा.



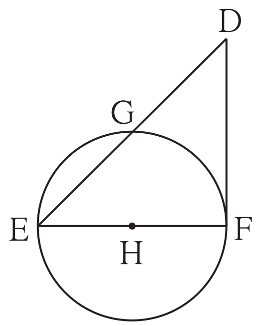
आकृती 3.79



आकृती 3.80

4. आकृती 3.80 मध्ये, जर PQ = 6, QR = 10, PS = 8 तर TS = किती ?

5. आकृती 3.81 मध्ये, रेख EF हा व्यास आणि रेख DF हा स्पर्शिकाखंड आहे. वर्तुळाची त्रिज्या r आहे. तर सिद्ध करा – $DE \times GE = 4r^2$



आकृती 3.81

1. पुढील प्रत्येक उपप्रश्नासाठी चार पर्यायी उत्तरे दिली आहेत. त्यांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(1) त्रिज्या अनुक्रमे 5.5 सेमी आणि 3.3 सेमी असलेली दोन वर्तुळे परस्परांना स्पर्श करतात. त्यांच्या केंद्रातील अंतर किती सेमी आहे ?

(A) 4.4 (B) 8.8 (C) 2.2 (D) 8.8 किंवा 2.2

(2) परस्परांना छेदणाऱ्या दोन वर्तुळांपैकी प्रत्येक वर्तुळ दुसऱ्या वर्तुळाच्या केंद्रातून जाते. जर त्यांच्या केंद्रांतील अंतर 12 सेमी असेल, तर प्रत्येक वर्तुळाची त्रिज्या किती सेमी आहे ?

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) सांगता येणार नाही

(3) 'एक वर्तुळ एका समांतरभुज चौकोनाच्या सर्व बाजूंना स्पर्श करते, तर तो समांतरभुज चौकोन .... असला पाहिजे', या विधानातील रिकाम्या जागी योग्य शब्द लिहा.

(A) आयत (B) समभुज चौकोन (C) चौरस (D) समलंब चौकोन

(4) एका वर्तुळाच्या केंद्रापासून 12.5 सेमी अंतरावरील एका बिंदूतून त्या वर्तुळाला काढलेल्या स्पर्शिकाखंडाची लांबी 12 सेमी आहे. तर त्या वर्तुळाचा व्यास किती सेमी आहे ?

(A) 25 (B) 24 (C) 7 (D) 14

(5) एकमेकांना बाहेरून स्पर्श करणाऱ्या दोन वर्तुळांना जास्तीत जास्त किती सामाईक स्पर्शिका काढता येतील ?

(A) एक (B) दोन (C) तीन (D) चार

(6) केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या कंस ACB मध्ये $\angle ACB$ अंतर्लिखित केला आहे. जर $m\angle ACB = 65^\circ$ तर m(कंस ACB) = किती ?

(A) 65° (B) 130° (C) 295° (D) 230°

(7) एका वर्तुळाच्या जीवा AB आणि CD परस्परांना वर्तुळाच्या अंतर्भागात बिंदू E मध्ये छेदतात. जर (AE) = 5.6, (EB) = 10, (CE) = 8 तर (ED) = किती ?

(A) 7 (B) 8 (C) 11.2 (D) 9

(8) चक्रीय $\square$ ABCD मध्ये, कोन $\angle A$ च्या मापाची दुप्पट ही $\angle C$ च्या मापाच्या तिप्पटी एवढी आहे. तर $\angle C$ चे माप किती ?

(A) 36 (B) 72 (C) 90 (D) 108

(9)★ एकाच वर्तुळावर बिंदू A, B, C असे आहेत, की m(कंस AB) = m(कंस BC) = 120°, दोन्ही कंसात B शिवाय एकही बिंदू सामाईक नाही. तर Δ ABC कोणत्या प्रकारचा आहे ?

(A) समभुज त्रिकोण (B) विषमभुज त्रिकोण

(C) काटकोन त्रिकोण (D) समद्विभुज त्रिकोण

(10) रेख XZ व्यास असलेल्या वर्तुळाच्या अंतर्भागात Y हा एक बिंदू आहे. तर खालीलपैकी किती विधाने सत्य आहेत ?

(i) $\angle XYZ$ हा लघुकोन असणे शक्य नाही.

(ii) $\angle XYZ$ हा काटकोन असणे शक्य नाही.

(iii) $\angle XYZ$ हा विशालकोन आहे.

(iv) $\angle XYZ$ च्या मापासंबंधी निश्चित विधान करता येणार नाही.

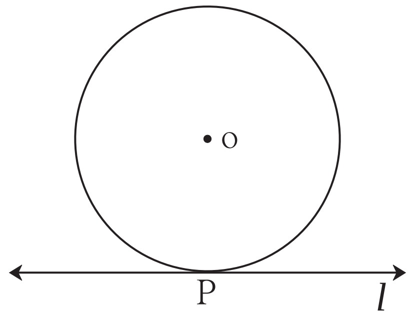
(A) फक्त एक (B) फक्त दोन (C) फक्त तीन (D) सर्व

2. बिंदू O केंद्र असलेल्या वर्तुळाला रेषा l बिंदू P मध्ये स्पर्श करते. जर वर्तुळाची त्रिज्या 9 सेमी असेल, तर खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(1) $d(O, P)$ = किती ? का ?

(2) जर $d(O, Q) = 8$ सेमी असेल. तर बिंदू Q चे स्थान कोठे असेल ?

(3) $d(O,R)=15$ सेमी असेल तर बिंदू R ची किती स्थाने रेषा l वर असतील ? ते बिंदू P पासून किती अंतरावर असतील ?



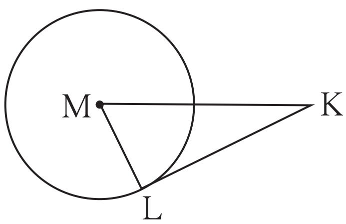
आकृती 3.82

3. सोबतच्या आकृतीत, बिंदू M वर्तुळकेंद्र आणि रेख KL हा स्पर्शिकाखंड आहे.

जर MK = 12, KL = $6\sqrt{3}$ तर

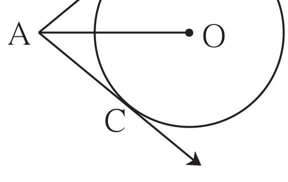
(1) वर्तुळाची त्रिज्या काढा.

(2) $\angle K$ आणि $\angle M$ यांची मापे ठरवा.

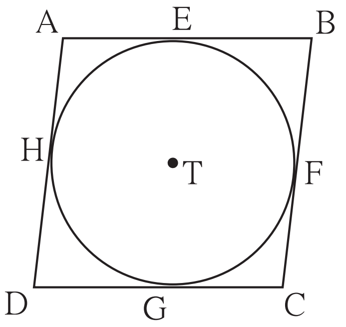


आकृती 3.83

4. आकृती 3.84 मध्ये, बिंदू O वर्तुळकेंद्र आणि रेख AB व रेख AC हे स्पर्शिकाखंड आहेत. जर वर्तुळाची त्रिज्या r असेल आणि $l(AB) = r$ असेल, तर □ ABOC हा चौरस होतो, हे दाखवा.



आकृती 3.84



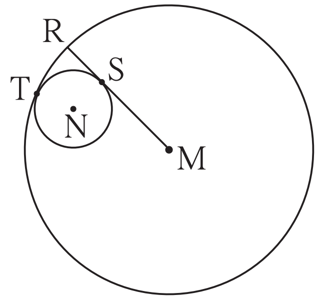
आकृती 3.85

5. आकृती 3.85 मध्ये, समांतरभुज □ ABCD हा केंद्र T असलेल्या वर्तुळाभोवती परिलिखित केला आहे. (म्हणजे त्या चौकोनाच्या बाजू वर्तुळाला स्पर्श करतात.) बिंदू E, F, G आणि H हे स्पर्शबिंदू आहेत. जर AE = 4.5 आणि EB = 5.5, तर AD काढा.

6. आकृती 3.86 मध्ये, केंद्र N असलेले वर्तुळ केंद्र M असणाऱ्या वर्तुळाला बिंदू T मध्ये स्पर्श करते. मोठ्या वर्तुळाची त्रिज्या लहान वर्तुळाला बिंदू S मध्ये स्पर्श करते. जर मोठ्या व लहान वर्तुळांच्या त्रिज्या अनुक्रमे 9 सेमी व 2.5 सेमी असतील तर खालील प्रश्नांची उत्तरे शोधा आणि त्यांवरून MS : SR हे गुणोत्तर काढा.

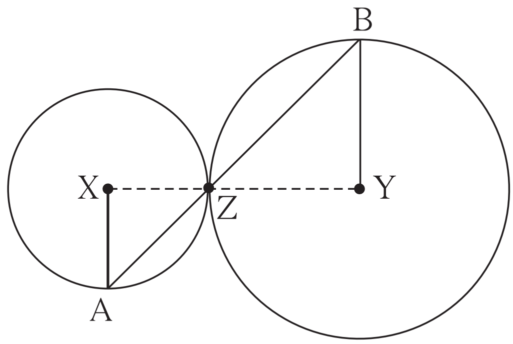
(1) MT = किती? (2) MN = किती?

(3) ∠NSM = किती?



आकृती 3.86

7. सोबतच्या आकृतीत, केंद्र X आणि Y असलेली वर्तुळे परस्परांना बिंदू Z मध्ये स्पर्श करतात. बिंदू Z मधून जाणारी वृत्तछेदिका त्या वर्तुळांना अनुक्रमे बिंदू A व बिंदू B मध्ये छेदते. तर सिद्ध करा, त्रिज्या XA || त्रिज्या YB. खाली दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून पूर्ण सिद्धता लिहून काढा.



आकृती 3.87

रचना : रेख XZ आणि .... काढले.

सिद्धता : स्पर्शवर्तुळांच्या प्रमेयानुसार, बिंदू X, Z, Y हे .... आहेत.

∴ ∠ XZA ≅ .... विरुद्ध कोन

∠ XZA = ∠ BZY = a मानू ..... (I)

आता, रेख XA ≅ रेख XZ .... (..........)

∴ ∠ XAZ = ... = a .... (समद्विभुज त्रिकोणाचे प्रमेय) (II)

तसेच रेख YB ≅ .... (..........)

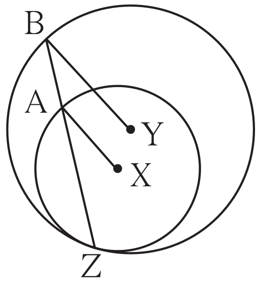
∴ ∠ BZY = ... = a .... (..........) (III)

$\therefore$ (I), (II) व (III) वरून,

$\angle$ XAZ = ...

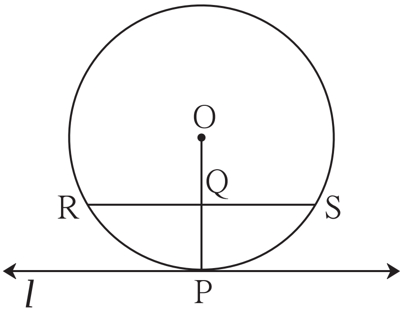
$\therefore$ त्रिज्या XA $\parallel$ त्रिज्या YB .... (..........)

8. आकृती 3.88 मध्ये, केंद्र X व Y असणारी अंतर्स्पर्शी वर्तुळे बिंदू Z मध्ये स्पर्श करतात. रेख BZ ही मोठ्या वर्तुळाची जीवा लहान वर्तुळाला बिंदू A मध्ये छेदते.
तर सिद्ध करा – रेख AX $\parallel$ रेख BY.



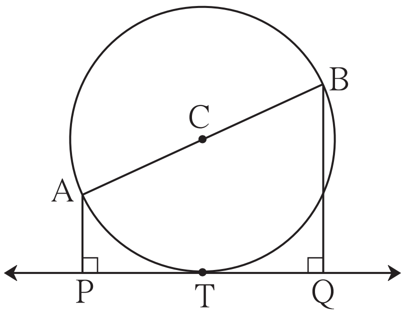
आकृती 3.88

9. शेजारील आकृतीत, रेषा l ही केंद्र O असलेल्या वर्तुळाला बिंदू P मध्ये स्पर्श करते. बिंदू Q हा त्रिज्या OP चा मध्यबिंदू आहे. बिंदू Q ला सामावणारी जीवा RS $\parallel$ रेषा l.
जर RS 12 सेमी असेल, तर वर्तुळाची त्रिज्या काढा.



आकृती 3.89

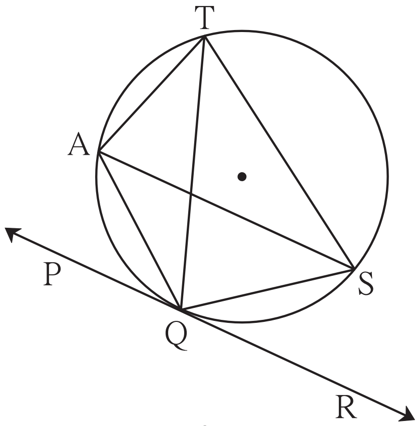
10★. आकृती 3.90 मध्ये, केंद्र C असलेल्या वर्तुळाचा रेख AB हा व्यास आहे. वर्तुळाची स्पर्शिका PQ वर्तुळाला बिंदू T मध्ये स्पर्श करते.
रेख AP $\perp$ रेषा PQ आणि रेख BQ $\perp$ रेषा PQ.
तर सिद्ध करा – रेख CP $\cong$ रेख CQ.



आकृती 3.90

11★. प्रत्येकी 3 सेमी त्रिज्येची, केंद्र A, B व C असणारी तीन वर्तुळे अशी काढा, की प्रत्येक वर्तुळ इतर दोन वर्तुळांना स्पर्श करेल.

12★. वर्तुळाचे कोणतेही तीन बिंदू एकरेषीय नसतात, हे सिद्ध करा.



आकृती 3.91

13. आकृती 3.91 मध्ये रेषा PR वर्तुळाला बिंदू Q मध्ये स्पर्श करते. या आकृतीच्या आधारे खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(1) $\angle$TAQ आणि $\angle$TSQ यांच्या मापांची बेरीज किती?

(2) $\angle$AQP शी एकरूप असणारे कोन कोणते ?

(3) $\angle$QTS शी एकरूप असणारे कोन कोणते?

(4) जर $\angle TAS = 65°$, तर $\angle$TQS आणि कंस TS यांची मापे सांगा.

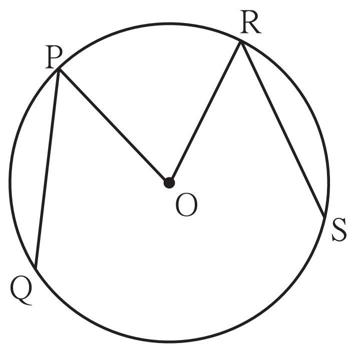
(5) जर $\angle AQP = 42°$ आणि $\angle SQR = 58°$, तर $\angle$ATS चे माप काढा.

14. सोबतच्या आकृतीत, केंद्र O असलेल्या वर्तुळाच्या रेख PQ आणि रेख RS या एकरूप जीवा आहेत. जर $\angle POR = 70°$ आणि m(कंस RS) = 80°, तर –

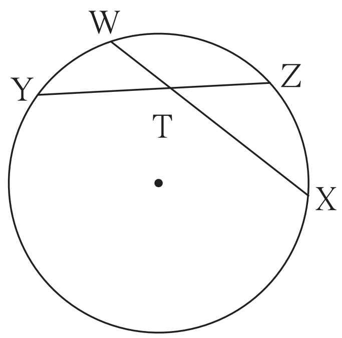
(1) m(कंस PR) किती?

(2) m(कंस QS) किती?

(3) m(कंस QSR) किती?



आकृती 3.92



आकृती 3.93

15. आकृती 3.93 मध्ये, m(कंस WY) = 44°, m(कंस ZX) = 68°, तर

(1) $\angle$ZTX चे माप ठरवा.

(2) WT = 4.8, TX = 8.0, YT = 6.4 तर TZ = किती?

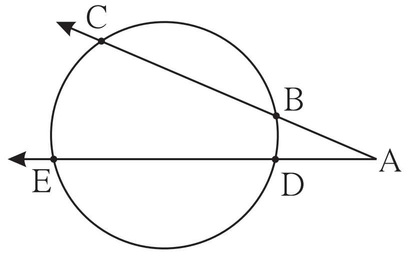
(3) WX = 25, YT = 8, YZ = 26, तर WT = किती?.

16. आकृती 3.94 मध्ये,

(1) m(कंस CE) = 54°,
m(कंस BD) = 23°, तर ∠CAE = किती ?

(2) AB = 4.2, BC = 5.4,
AE = 12.0 तर AD = किती ?

(3) AB = 3.6, AC = 9.0,
AD = 5.4 तर AE = किती ?



आकृती 3.94

17. शेजारी दिलेल्या आकृतीत, जीवा EF || जीवा GH. तर सिद्ध करा, जीवा EG ≅ जीवा FH .
पुढे दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरा आणि सिद्धता लिहा.

सिद्धता : रेख GF काढला.

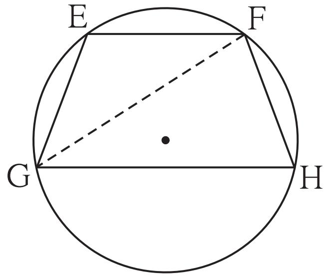
∠ EFG = ∠ FGH .... [ ] (I)

∠ EFG = [ ] (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय) (II)

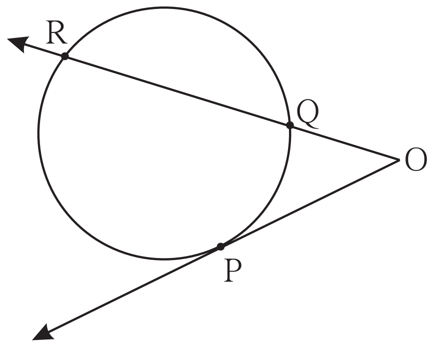
∠ FGH = [ ] (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय) (III)

∴ m (कंस EG) = [ ] [(I), (II) व (III) वरून]

जीवा EG ≅ जीवा FH ....([ ])



आकृती 3.95



आकृती 3.96

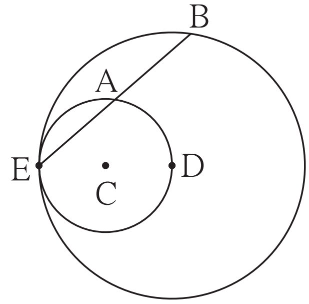
18. शेजारच्या आकृतीत बिंदू P हा स्पर्शबिंदू आहे.

(1) m(कंस PR) = 140,
∠ POR = 36° तर
m(कंस PQ) = किती ?

(2) OP = 7.2, OQ = 3.2,
OR = किती ? QR = किती ?

(3) OP = 7.2, OR = 16.2, तर
QR = किती ?

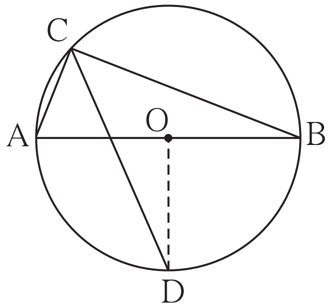
19. सोबतच्या आकृतीत, केंद्र C असलेले वर्तुळ केंद्र D असलेल्या वर्तुळाला बिंदू E मध्ये आतून स्पर्श करते. बिंदू D हा आतील वर्तुळावर आहे. बाहेरील वर्तुळाची जीवा EB ही आतील वर्तुळाला बिंदू A मध्ये छेदते.
तर सिद्ध करा, की रेख EA ≅ रेख AB.



आकृती 3.97

20. आकृती 3.98 मध्ये, रेख AB हा केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा व्यास आहे. अंतर्लिखित कोन ACB चा दुभाजक वर्तुळाला बिंदू D मध्ये छेदतो. तर रेख AD ≅ रेख BD हे सिद्ध करा.

पुढे दिलेल्या सिद्धतेतील रिकाम्या जागा भरून ती पूर्ण करा आणि लिहा.



आकृती 3.98

सिद्धता : रेख OD काढला.

∠ ACB = ☐ (अर्धवर्तुळात अंतर्लिखित कोन)

∠ DCB = ☐ (रेख CD हा ∠ C चा दुभाजक)

m(कंस DB) = ☐ (अंतर्लिखित कोनाचे प्रमेय)

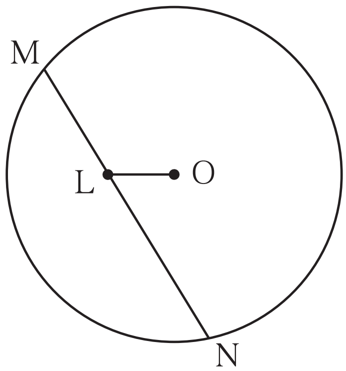
∠ DOB = ☐ (कंसाच्या मापाची व्याख्या) (I)

रेख OA ≅ रेख OB .... ☐ (II)

∴ रेषा OD ही रेख AB ची ☐ रेषा आहे. (I) व (II) वरून

∴ रेख AD ≅ रेख BD

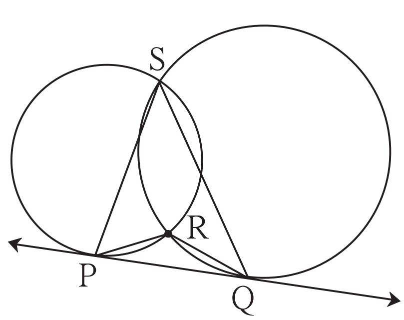
21. सोबतच्या आकृतीत रेख MN ही केंद्र O असलेल्या वर्तुळातील जीवा आहे. MN = 25, जीवा MN वर बिंदू L असा आहे की ML = 9 आणि d(O,L) = 5 तर या वर्तुळाची त्रिज्या किती असेल?



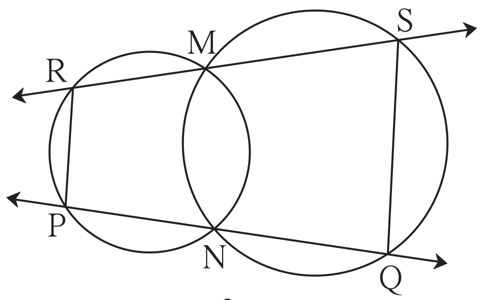
आकृती 3.99

22*. आकृती 3.100 मध्ये दोन वर्तुळे परस्परांना बिंदू S व R मध्ये छेदतात. त्यांची रेषा PQ ही सामाईक स्पर्शिका त्यांना बिंदू P व Q मध्ये स्पर्श करते, तर सिद्ध करा –

∠ PRQ + ∠ PSQ = 180°



आकृती 3.100

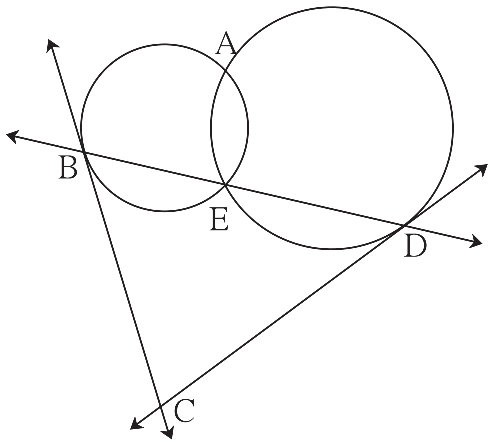


आकृती 3.101

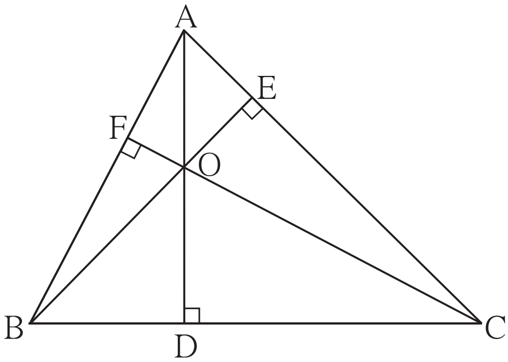
23★. आकृती 3.101 मध्ये, दोन वर्तुळे एकमेकांना बिंदू M व N मध्ये छेदतात. बिंदू M व N मधून काढलेल्या वृत्तछेदिका बिंदू R व S मध्ये, आणि बिंदू P व Q मध्ये छेदतात. तर रेख PR || रेख QS, हे सिद्ध करा.

24★. दोन वर्तुळे परस्परांना बिंदू A व E मध्ये छेदतात. बिंदू E मधून काढलेली त्यांची सामाईक वृत्तछेदिका वर्तुळांना बिंदू B व D मध्ये छेदते. बिंदू B व D मधून काढलेल्या स्पर्शिका एकमेकींना बिंदू C मध्ये छेदतात.

सिद्ध करा : □ ABCD चक्रीय आहे.

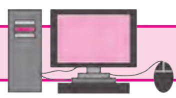


आकृती 3.102



आकृती 3.103

25★. Δ ABC मध्ये, रेख AD ⊥ बाजू BC, रेख BE ⊥ बाजू AC, रेख CF ⊥ बाजू AB. बिंदू O हा शिरोलंबसंपात आहे. तर बिंदू O हा Δ DEF चा अंतर्मध्य होतो, हे सिद्ध करा.



ICT Tools or Links

जिओजेब्राच्या सहाय्याने विविध वर्तुळे काढा.
त्यांमध्ये जीवा व स्पर्शिका काढून गुणधर्म तपासा.