11 सांख्यिकी

जरा आठवूया.

उदा. निनादने एका पुस्तकाच्या दररोज वाचलेल्या पृष्ठांची संख्या 60, 50, 54, 46, 50 अशी आहे. यावरून दररोज वाचलेल्या पृष्ठांची सरासरी काढा.

उकल : $\text{सरासरी} = \dfrac{\text{सर्व प्राप्तांकांची बेरीज}}{\text{एकूण प्राप्तांकांची संख्या}}$

$$= \frac{60 + \square + \square + \square + 50}{\square} = \frac{\square}{\square} = \square$$

$\therefore$ दररोज वाचलेल्या पृष्ठांची सरासरी $\square$ आहे.

या सरासरीस मध्य किंवा मध्यमान म्हणतात.

जाणून घेऊया.

वरील उदाहरणात रोज वाचलेल्या पृष्ठांची संख्या ही सांख्यिक माहिती आहे. त्यावरून निनादने रोज साधारणपणे 52 पृष्ठे वाचली असा निष्कर्ष काढला आहे.

अशा रीतीने घटनेविषयी किंवा समस्येविषयी सांख्यिक माहिती जमा करणे, त्या माहितीचा अभ्यास करून काही निष्कर्ष मिळवणे, ही एक स्वतंत्र ज्ञानशाखा आहे. या शाखेला **सांख्यिकी** असे नाव आहे.

मध्य (Mean)

आपण पाहिले की 60, 50, 54, 46 व 50 या संख्यांची सरासरी 52 येते. या सरासरीला सांख्यिकीच्या परिभाषेत मध्य म्हणतात. सांख्यिक सामग्रीचा मध्य काढण्यासाठी सामग्रीतील संख्यांची बेरीज करतात. या बेरजेला सामग्रीतील संख्यांच्या संख्येने भागतात.

मध्य काढण्याच्या या रीतीचा आपण आणखी अभ्यास करू. त्यासाठी पुढील उदाहरण पाहा.

उदा. एका शाळेतील इयत्ता 8 वी च्या 37 विद्यार्थ्यांना गणित विषयात एका 10 गुणांच्या चाचणीत मिळालेले गुण खालीलप्रमाणे आहेत. या गुणांचा मध्य काढा.

2, 4, 4, 8, 6, 7, 3, 8, 9, 10, 10, 8, 9, 7, 6, 5, 4, 6, 7, 8, 4, 8, 9, 7, 6, 5, 10, 9, 7, 9, 10, 9, 6, 9, 9, 4, 7.

उकल : या उदाहरणात सामग्रीतील संख्यांची बेरीज करण्यासाठी बराच वेळ जाईल. आपल्याला माहीत आहे की 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 × 5 = 35. यावरून एका संख्येत तीच संख्या मिळवण्याची क्रिया सोपी होते, हे लक्षात घ्या. याचाच उपयोग करून वरील सामग्रीतील संख्यांची बेरीज करणे सोईचे होईल म्हणून सामग्रीतील संख्यांचे वर्गीकरण करून संख्याची बेरीज करू.

गुण, x_i (प्राप्तांक)	ताळ्याच्या खुणा	विद्यार्थी संख्या (वारंवारता) f_i	$f_i \times x_i$
2	|	1	$1 \times 2 = 2$
3	|	1	$1 \times 3 = 3$
4	~~||||~~	5	$5 \times 4 = 20$
5	||	2	$2 \times 5 = 10$
6	~~||||~~	5	$5 \times 6 = 30$
7	~~||||~~ |	6	$6 \times 7 = 42$
8	~~||||~~	5	$5 \times 8 = 40$
9	~~||||~~ |||	8	$8 \times 9 = 72$
10	||||	4	$4 \times 10 = 40$
		N = 37	$\Sigma f_i x_i = 259.$

$$\text{मध्य} = \frac{\Sigma f_i \times x_i}{N} = \frac{259}{37} = 7$$

वरीलप्रमाणे सारणी तयार करून दिलेल्या सामग्रीचा मध्य काढण्याच्या पुढील पायऱ्या लक्षात ठेवा.

- पहिल्या स्तंभात $x_1 < x_2 < x_3$... असे चढत्या क्रमाने प्राप्तांक लिहा, ते x_i ने दर्शवले.
- दुसऱ्या स्तंभात ताळ्याच्या खुणा करा.
- तिसऱ्या स्तंभात प्रत्येक प्राप्तांकाशी संबंधित ताळ्याच्या खुणा मोजून वारंवारता लिहा. ही वारंवारता f_i ने दर्शवली आहेत. त्याखाली सर्व वारंवारतांची बेरीज लिहा. एकूण वारंवारता N ने दर्शवली आहे.
- शेवटच्या स्तंभात $f_i \times x_i$ हे गुणाकार लिहा. त्याखाली सर्व गुणाकारांची बेरीज लिहा. $f_i \times x_i$ या गुणाकारांची बेरीज $\Sigma f_i \times x_i$ अशी दाखवली जाते. Σ (सिग्मा) हे चिन्ह 'बेरीज' या अर्थाने वापरले जाते. मध्य $\overline{x}$ (एक्स बार) ने दर्शवतात.

$$\therefore \text{मध्य } \overline{x} = \frac{\Sigma f_i \times x_i}{N}$$

उदा. राजापूर या गावातील 30 शेतकऱ्यांचे सोयाबीनचे एकरी उत्पादन क्विंटलमध्ये खालीलप्रमाणे आहे.

9, 7.5, 8, 6, 5.5, 7.5, 5, 8, 5, 6.5, 5, 5.5, 4, 4, 8,

6, 8, 7.5, 6, 9, 5.5, 7.5, 8, 5, 6.5, 5, 9, 5.5, 4, 8.

यावरून वारंवारता वितरण सारणी तयार करा आणि सोयाबीनच्या एकरी उत्पादनाचा मध्य काढा.

उकल :

एकरी उत्पादन (क्विंटल) (प्राप्तांक) x_i	ताळ्याच्या खुणा	शेतकरी संख्या (वारंवारता) f_i	$f_i \times x_i$
4	|||	3	12
5	卌	5	25
5.5	||||	4	22
6	|||	3	18
6.5	||	2	13
7.5	||||	4	30
8	卌 |	6	48
9	|||	3	27
		N = 30	$\Sigma f_i x_i = 195.$

मध्यमान $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i \times x_i}{N} = \dfrac{195}{30} = 6.5$

एकरी सोयाबीन उत्पादनाचा मध्य 6.5 क्विंटल.

सरावसंच 11.1

1. इयत्ता 8 वी मधील 30 विद्यार्थ्यांपैकी प्रत्येकाने लावलेल्या रोपांची संख्या खालील वारंवारता सारणीत दिली आहे. यावरून प्रत्येकाने लावलेल्या रोपांचा मध्य काढण्यासाठी खालील चौकटी पूर्ण करा.

रोपांची संख्या (प्राप्तांक) x_i	विद्यार्थी संख्या (वारंवारता) f_i	$f_i \times x_i$
1	4	4
2	6	□
3	12	□
4	8	□
	N = □	$\Sigma f_i x_i$ = □

मध्य $\bar{x} = \dfrac{\square}{N}$

$= \dfrac{\square}{\square}$

$= \square$

$\therefore$ प्रत्येकाने लावलेल्या रोपांचा मध्य □ आहे.

2. एकलारा गावातील 25 कुटुंबांत मे महिन्यात वापरलेली वीज युनिटमध्ये खालील सारणीत दिली आहे. सारणी पूर्ण करून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

वीज वापर (युनिट) (प्राप्तांक) x_i	कुटुंबांची संख्या (वारंवारता) f_i	$f_i \times x_i$
30	7	....
45	2	....
60	8	....
75	5	....
90	3	....
	N = ...	$\Sigma f_i x_i$ =.......

(1) 45 युनिट वीज वापरणारी एकूण कुटुंबे किती ?

(2) ज्या प्राप्तांकाची वारंवारता 5 आहे तो प्राप्तांक कोणता ?

(3) N = किती? $\Sigma f_i x_i$ = किती?

(4) यावरून मे महिन्यात प्रत्येक कुटुंबाने वापरलेल्या विजेचा मध्य काढा.

3. भिलार येथील 40 कुटुंबांतील सदस्यांची संख्या पुढीलप्रमाणे आहे. 1, 6, 5, 4, 3, 2, 7, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 2, 3, 2, 1, 4, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 2, 3, 5, 5, 4, 6, 2, 3, 5, 6, 4, 2. यावरून या 40 कुटुंबांतील सदस्यांचा मध्य वारंवारता सारणीचा वापर करून काढा.

4. 'मॉडेल हायस्कूल, नांदपूर' ने राज्यस्तरीय विज्ञान प्रदर्शनात मागील 20 वर्षांत सादर केलेल्या विज्ञान व गणित प्रकल्पांची संख्या खालीलप्रमाणे आहे. यावरून वारंवारता सारणी तयार करून सामग्रीचा मध्य काढा.
2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 5, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 2.

जाणून घेऊया.

मागील इयत्तेत आपण साधा स्तंभालेख व जोडस्तंभालेख यांचा अभ्यास केला आहे. आता अजून काही स्तंभालेखांचा अभ्यास करू.

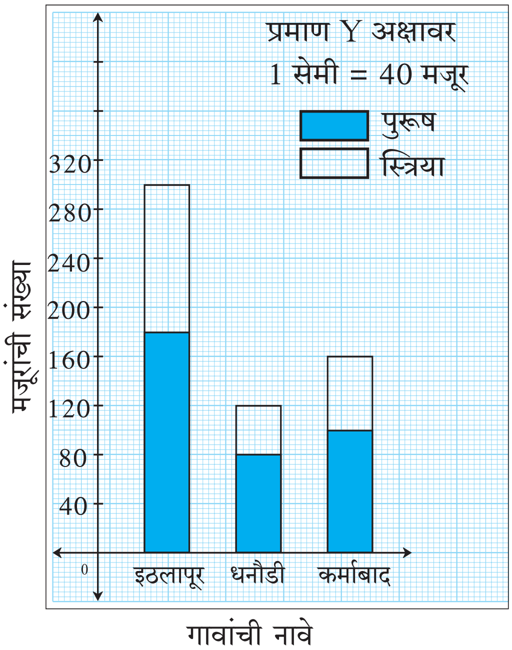
विभाजित स्तंभालेख (Subdivided bar diagram)

सामग्रीतील माहितीचे तुलनात्मक विश्लेषण जोड स्तंभालेखाप्रमाणे विभाजित स्तंभालेखाने सुद्धा करता येते. यात दोन किंवा अधिक घटकांची माहिती एकाच स्तंभात दाखवली जाते. विभाजित स्तंभालेख काढण्याच्या पायऱ्या बघू.

गाव	इठलापूर	धनोडी	कर्माबाद
पुरुष मजूर	180	80	100
स्त्री मजूर	120	40	60
एकूण मजूर	300	☐	☐

- प्रथम सामग्रीतील माहितीची वरीलप्रमाणे सारणी तयार करा.

- आलेख कागदावर X- अक्ष व Y- अक्ष काढा.
- समान अंतर ठेवून, X- अक्षावर गावांची नावे लिहा.
- Y - अक्षावर मजूरांची संख्या लिहा. 1 सेमी = 40 मजूर हे प्रमाण घ्या.
- इठलापूर गावात एकूण मजूर 300 आहेत. मजूरांची ही संख्या एका स्तंभाने दाखवा.

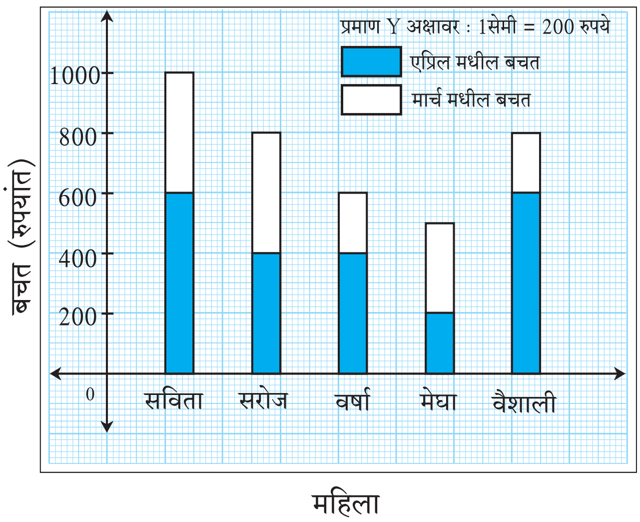


- त्यामध्ये पुरुष मजूर हा एकूण मजूरांच्या स्तंभाचा एक भाग आहे, तो एका खुणेने दाखवा.
- स्तंभाचा राहिलेला भाग हा साहजिकच स्त्री मजूरांची संख्या दाखवेल. तो वेगळ्या खुणेने दाखवा.
- याप्रमाणेच धनोडी व कर्माबाद गावांकरिता विभाजित स्तंभ काढा.

वरील पायऱ्यांनुसार विभाजित स्तंभालेख शेजारी काढून दाखवला आहे, त्याचे निरीक्षण करा.

सरावसंच 11.2

1. खालील आकृतीचे निरीक्षण करून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



(1) ही आकृती कोणत्या प्रकारच्या स्तंभालेखाची आहे ?

(2) वैशालीची एप्रिल महिन्यातील बचत किती आहे ?

(3) सरोजची मार्च व एप्रिल महिन्यांतील एकूण बचत किती ?

(4) सविताची एकूण बचत मेघाच्या एकूण बचतीपेक्षा किती जास्त आहे ?

(5) कोणाची एप्रिल महिन्यातील बचत सर्वांत कमी आहे ?

2. एका जि. प. शाळेतील इयत्ता 5 वी ते 8 वी मधील मुलांची व मुलींची संख्या खालील सारणीत दिली आहे. यावरून विभाजित स्तंभालेख काढा. (प्रमाण : Y अक्षावर 1 सेमी = 10 विद्यार्थी घ्या.)

इयत्ता	5 वी	6 वी	7 वी	8 वी
मुले	34	26	21	25
मुली	17	14	14	20

3. खालील सारणीत चार गावांमध्ये 2016 आणि 2017 या वर्षांत लावलेल्या झाडांच्या संख्या दिल्या आहेत. सारणीतील माहिती विभाजित स्तंभालेखाने दाखवा.

गाव / वर्ष	कर्जत	वडगाव	शिवापूर	खंडाळा
2016	150	250	200	100
2017	200	300	250	150

4. खालील सारणीत तीन शहरांतील इयत्ता 8 वीतील विद्यार्थ्यांनी शाळेत जाण्यासाठी वापरलेल्या वाहतुकीच्या साधनांची व पायी जाणाऱ्यांची माहिती दिली आहे. ही माहिती दर्शवणारा विभाजित स्तंभालेख काढा. (प्रमाण : Y अक्षावर – 1 सेमी = 500 विद्यार्थी घ्या.)

शहर / साधन	पैठण	येवला	शहापूर
सायकल	3250	1500	1250
बस व ऑटो	750	500	500
पायी	1000	1000	500

जाणून घेऊया.

शतमान स्तंभालेख (Percentage bar diagram)

आर्वी या गावामध्ये लावलेल्या 60 झाडांपैकी 42 झाडे जगली आणि मोर्शी या गावामध्ये लावलेल्या 75 झाडांपैकी 45 झाडे जगली. बार्शी या गावात लावलेल्या 90 झाडांपैकी 45 झाडे जगली.

कोणत्या गावातील वृक्षारोपण अधिक यशस्वी झाले ते समजण्यासाठी केवळ संख्या पुरेशा नाहीत. त्यासाठी जगलेल्या झाडांचे शतमान काढावे लागेल.

आर्वी येथे जगलेल्या झाडांचे शेकडा प्रमाण $= \frac{42}{60} \times 100 = 70.$

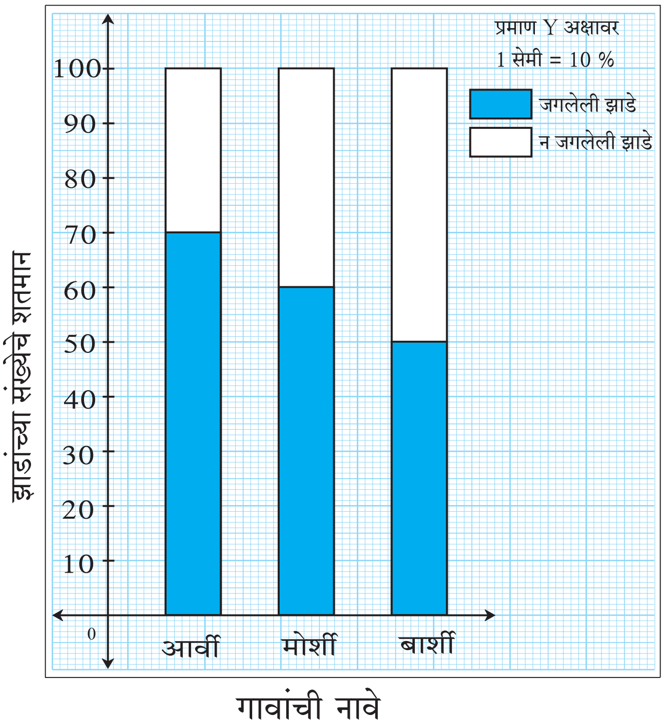
मोर्शी येथे जगलेल्या झाडांचे शेकडा प्रमाण $= \frac{45}{75} \times 100 = 60.$

या शतमानांवरून असे लक्षात येते की आर्वी गावातील जगलेल्या झाडांची संख्या कमी असली तरी त्यांचे शतमान जास्त आहे. म्हणजेच शतमानांवरून थोड्या वेगळ्या प्रकारची माहिती मिळते. दिलेली माहिती शतमानात

रूपांतरित करून जो विभाजित स्तंभालेख काढतात, त्याला शतमान स्तंभालेख म्हणतात. म्हणजेच शतमान स्तंभालेख हे विभाजित स्तंभालेखाचे विशेष रूप असते. हा शतमान स्तंभालेख खालील पायऱ्यांच्या आधारे काढू.

- प्रथम खालीलप्रमाणे सारणी तयार करू.

गाव	आर्वी	मोर्शी	बार्शी
लावलेली एकूण झाडे	60	75	90
जगलेली झाडे	42	45	45
जगलेल्या झाडांचे शतमान	$\frac{42}{60} \times 100 = \boxed{70}$	$\frac{45}{75} \times 100 = \boxed{60}$	$\frac{45}{90} \times 100 = \boxed{50}$



- शतमान स्तंभालेखात सर्व स्तंभ 100 एकक उंचीचे घेतात.
- प्रत्येक स्तंभात जगलेल्या झाडांचे शतमान दाखवू. उरलेले शतमान न जगलेल्या झाडांचे असेल.
- शतमान स्तंभालेख हा एक प्रकारचा विभाजित स्तंभालेख असल्यामुळे बाकी सर्व कृती विभाजित स्तंभालेख काढण्याच्या कृतीप्रमाणेच असते.

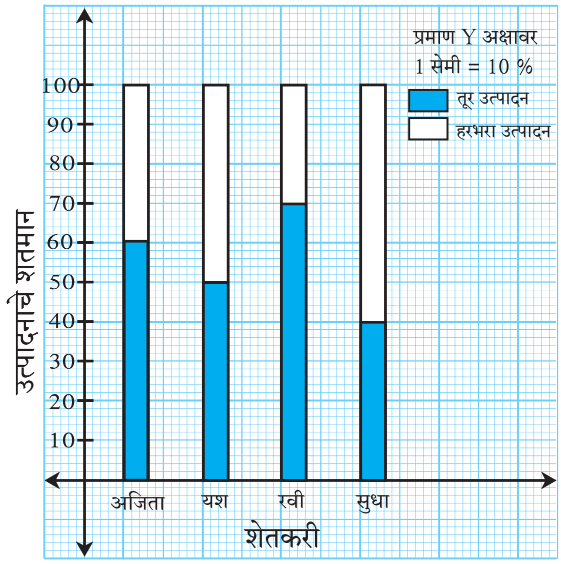
वरील पायऱ्यांनुसारच शेजारील स्तंभालेख काढला आहे. त्याचे निरीक्षण करा.

सरावसंच 11.3

1. खालील सारणीतील माहितीवरून शतमान स्तंभालेख काढा.

इयत्ता आठवीची तुकडी	A	B	C	D
गणितात श्रेणी A मध्ये आलेले विद्यार्थी	45	33	10	15
एकूण विद्यार्थी	60	55	40	75

2. पुढील स्तंभालेखाचे निरीक्षण करून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



(1) शेजारील स्तंभालेख कोणत्या प्रकारचा आहे?

(2) अजिताच्या शेतातील तुरीचे उत्पादन एकूण उत्पादनाच्या किती टक्के आहे ?

(3) यश आणि रवी यांच्यापैकी कोणाच्या हरभरा उत्पादनाचे शतमान किती जास्त आहे ?

(4) तुरीच्या उत्पादनाचे सर्वांत कमी शतमान कोणाचे आहे?

(5) सुधाच्या तूर व हरभरा यांच्या उत्पादनांची शेकडेवारी किती ?

3. काही शाळांतील इयत्ता 10 वीतील विद्यार्थ्यांचे सर्वेक्षण करून मिळालेली माहिती खालील सारणीत दिली आहे. ती माहिती शतमान स्तंभालेखाने दाखवा.

शाळा	पहिली	दुसरी	तिसरी	चौथी
विज्ञान शाखेकडे कल	90	60	25	16
वाणिज्य शाखेकडे कल	60	20	25	24

उपक्रम : शतमान स्तंभालेख व विभाजित स्तंभालेख यांची तुलनात्मक चर्चा करा. याचा उपयोग करून विज्ञान, भूगोल यांसारख्या विषयांतील अशा आलेखांची माहिती घ्या.

उत्तरसूची

सरावसंच 11.1 2. (1) 2 (2) 75 (3) N = 25, $\Sigma f_i \times x_i = 1425$ (4) 57

3. 3.9 4. 2.75

सरावसंच 11.2 1. (1) विभाजित स्तंभालेख (2) ₹ 600 (3) ₹ 800

(4) ₹ 500 (5) मेघाची

सरावसंच 11.3 2. (1) शतमान स्तंभालेख (2) 60%

(3) यशचे उत्पादन 20% ने जास्त (4) सुधाचे

(5) 40% आणि 60%

CKLJ96