3 बहुपदी

30HP9J

चला, शिकूया.

- बहुपदीची ओळख
- बहुपदींवरील क्रिया
- बहुपदीची कोटी
- संश्लेषक भागाकार
- बहुपदीची किंमत
- शेषसिद्धांत

चला, चर्चा करूया.

$p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$; $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\, m^5$; 6 या सर्व बैजिक राशी आहेत.

शिक्षक : विद्यार्थी मित्रांनो, $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\, m^5$, 6 या प्रत्येक राशीतील एकेक पद घ्या. त्या पदातील चलांचे घातांक सांगा.

माधुरी : $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$ या राशीतील पदांच्या चलांचे घातांक अनुक्रमे 3, 2, 1 आहेत.

विवेक : सर, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\, m^5$ या राशीतील पदांच्या चलांचे घातांक अनुक्रमे 2, 3, 5 आहेत.

रोहित : सर, 6 या राशीमध्ये चल नाही. येथे $6 = 6 \times 1 = 6 \times x^0$ असे लिहिता येते, म्हणून 6 या राशीतील चलाचा घातांक 0 आहे.

शिक्षक : म्हणजे वरील सर्व राशींमध्ये चलांचे घातांक धनपूर्णांक किंवा शून्य, म्हणजेच पूर्ण संख्या आहेत.

ज्या बैजिक राशीमध्ये चलांचे घातांक पूर्ण संख्या असतात, त्या राशीला **बहुपदी** (polynomial) असे म्हणतात. 6 ही सुद्धा बहुपदी आहे. 6, -7, $\frac{1}{2}$, 0, $\sqrt{3}$ इत्यादी स्थिर संख्यांना **स्थिर बहुपदी** (Constant polynomial) म्हणतात.

$\sqrt{y} + 5$ व $\frac{1}{y} - 3$ या बहुपदी आहेत काय ?

सारा : सर, $\sqrt{y} + 5$ ही बहुपदी नाही. कारण $\sqrt{y} + 5 = y^{\frac{1}{2}} + 5$, यामध्ये y चा घातांक $\frac{1}{2}$ असून ती पूर्ण संख्या नाही.

जॉन : सर, $\frac{1}{y} - 3$ ही सुद्धा बहुपदी नाही. कारण $\frac{1}{y} - 3 = y^{-1} - 3$, येथे y चा घातांक -1 असून ती पूर्ण संख्या नाही.

शिक्षक : बहुपदी नसलेल्या कोणत्याही पाच बैजिक राशी लिहून त्या बहुपदी का नाहीत याचे स्पष्टीकरण द्या.

खालील प्रश्नांची उत्तरे वेगवेगळी उदाहरणे घेऊन व त्यांवर चर्चा करून शोधा.

- प्रत्येक बैजिक राशी ही बहुपदी असते काय ?
- प्रत्येक बहुपदी ही बैजिक राशी असते काय?

बहुपदीचे प्रकार (पदांच्या संख्येवरून)

$2x$, 5	$x^4 + x$, $m^2 - 3m$	$\frac{1}{2}y^2 - 2y + 5$, $x^3 - \sqrt{3}\, x^2 + 5x$
प्रत्येक बहुपदीत एकच पद	प्रत्येक बहुपदीत दोन पदे	प्रत्येक बहुपदीत तीन पदे
एकपदी	द्विपदी	त्रिपदी

एका चलातील बहुपदी तिच्यातील चलानुसार $p(x)$, $q(m)$, $r(y)$ अशा प्रकारे दर्शवतात.

उदाहरणार्थ $p(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ $\quad q(m) = m^2 + \frac{1}{2}m - 7$ $\quad r(y) = y^2 + 5$

जाणून घेऊया.

एका चलातील बहुपदीची कोटी (Degree of a polynomial in one variable)

शिक्षक : $2x^7 - 5x + 9$ या बहुपदीतील चलाचा सर्वांत मोठा घातांक कोणता आहे ?

जिजा : सर, सर्वांत मोठा घातांक 7 आहे.

शिक्षक : एका चलातील बहुपदीमध्ये, चलाच्या सर्वांत मोठ्या घातांकास त्या **बहुपदीची कोटी** म्हणतात. मग सांगा बरं, वरील बहुपदीची कोटी किती ?

अशोक : सर, $2x^7 - 5x + 9$ या बहुपदीची कोटी 7 आहे.

शिक्षक : 10 या बहुपदीची कोटी किती ?

राधा : $10 = 10 \times 1 = 10 \times x^0$ म्हणून 10 या बहुपदीची कोटी 0 आहे.

शिक्षक : 10 प्रमाणेच **कोणत्याही शून्येतर स्थिर बहुपदीची कोटी 0 असते.**

शून्य बहुपदीची कोटी निश्चित करता येत नाही.

एकापेक्षा अधिक चलांतील बहुपदीची कोटी

बहुपदीमधील प्रत्येक पदामध्ये असलेल्या चलांच्या घातांकांची जी बेरीज सर्वाधिक असते, त्या बेरजेस त्या **बहुपदीची कोटी** म्हणतात.

उदा. $3m^3n^6 + 7m^2n^3 - mn$ ही दोन चलांतील बहुपदी आहे. या बहुपदीची कोटी 9 आहे. (येथे घातांकांच्या बेरजा $3 + 6 = 9$, $2 + 3 = 5$, $1 + 1 = 2$)

कृती I : चल x व कोटी 5 असलेल्या एकपदी, द्विपदी व त्रिपदीचे प्रत्येकी एक उदाहरण लिहा.

एकपदी $\boxed{}$ द्विपदी $\boxed{}$ त्रिपदी $\boxed{}$

कृती II : 5 कोटी असलेल्या दोन चलांतील एका द्विपदीचे उदाहरण तयार करा. $\boxed{}$

बहुपदीचे प्रकार (कोटीवरून)

एका चलातील बहुपदी

$3x - 1,\ 7y$	$2y^2 + y + 1,\ - 3x^2$	$x^3 + x^2 + 2x + \sqrt{3}\ ,\ m - m^3$
कोटी 1	कोटी 2	कोटी 3
रेषीय बहुपदी	वर्ग बहुपदी	घन बहुपदी
सामान्यरूप $ax + b$ येथे a व b सहगुणक व $a \neq 0$	सामान्यरूप $ax^2 + bx + c$ येथे a, b, c सहगुणक व $a \neq 0$	सामान्यरूप $ax^3 + bx^2 + cx + d$ येथे a, b, c, d सहगुणक व $a \neq 0$

बहुपदी : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ **ही** x **या चलातील कोटी** n **असलेली बहुपदी आहे. येथे** $a_n, a_{n-1}, \ldots.., a_2, a_1, a_0$ **हे सहगुणक असून** $a_n \neq 0$

बहुपदीचे प्रमाणरूप, सहगुणक रूप व घातांक रूप
(Standard form, coefficient form and index form of a polynomial)

$p(x) = x - 3x^2 + 5 + x^4$ ही बहुपदी x च्या घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने $x^4 - 3x^2 + x + 5$ अशी लिहिता येईल. हे प्रमाणरूप आहे. या बहुपदीत x च्या तिसऱ्या घाताचे पद नाही. म्हणजेच ते $0x^3$ आहे असे मानता येते. हे पद घेऊन $p(x)$ ही बहुपदी $x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5$ अशी लिहिता येईल. अशा प्रकारे घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहिलेल्या व घातांकांची सर्व पदे उल्लेखलेल्या बहुपदीला घातांकरूप म्हणतात.

काही वेळा घातांकरूपातील बहुपदी मधले चल अध्याहृत मानून तिचे फक्त सहगुणक क्रमाने लिहितात, उदाहरणार्थ $x^3 - 3x^2 + 0x - 8$ ही बहुपदी $(1, -3, 0, -8)$ अशी लिहितात. याला बहुपदीचे सहगुणक रूप असे म्हणतात.

$(4, 0, -5, 0, 1)$ ही बहुपदी y हे चल वापरून घातांकरूपात $4y^4 + 0y^3 - 5y^2 + 0y + 1$ म्हणजेच $4y^4 - 5y^2 + 1$ अशी लिहिता येईल.

उदा. $p(m) = 3m^5 - 7m + 5m^3 + 2$

बहुपदी घातांकाच्या उतरत्या क्रमाने लिहा.	$3m^5 + 5m^3 - 7m + 2$
बहुपदीत नसलेली पदे शून्य सहगुणक घेऊन समाविष्ट करा आणि ती घातांकरूपात लिहा.	$3m^5 + 0m^4 + 5m^3 + 0m^2 - 7m + 2$
दिलेल्या बहुपदीचे सहगुणक रूप लिहा.	$(3, 0, 5, 0, -7, 2)$
बहुपदीची कोटी लिहा.	5

उदा (1) $x^3 + 3x - 5$ ही बहुपदी सहगुणक रूपात लिहा.

उकल : $x^3 + 3x - 5 = x^3 + 0x^2 + 3x - 5$

$\therefore$ दिलेल्या बहुपदीचे सहगुणक रूप $(1, 0, 3, -5)$

उदा (2) $(2, -1, 0, 5, 6)$ ही सहगुणक रूपातील बहुपदी घातांक रूपात लिहा.

उकल : बहुपदीचे सहगुणक रूप $(2, -1, 0, 5, 6)$

$\therefore$ घातांक रूपातील बहुपदी $= 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 5x + 6$

म्हणजेच $2x^4 - x^3 + 5x + 6$

सरावसंच 3.1

1. खालील राशी बहुपदी आहेत का ते लिहा. स्पष्टीकरण द्या.

   (i) $y + \frac{1}{y}$ (ii) $2 - 5\sqrt{x}$ (iii) $x^2 + 7x + 9$

   (iv) $2m^{-2} + 7m - 5$ (v) 10

2. खालील प्रत्येक बहुपदीतील m^3 चा सहगुणक लिहा.

   (i) m^3 (ii) $\frac{-3}{2} + m - \sqrt{3}m^3$ (iii) $\frac{-2}{3}m^3 - 5m^2 + 7m - 1$

3. खालील माहितीवरून x हे चल वापरून प्रत्येकी एक बहुपदी लिहा.

   (i) कोटी 7 असलेली एकपदी (ii) कोटी 35 असलेली द्विपदी (iii) कोटी 8 असलेली त्रिपदी

4. खालील प्रत्येक बहुपदीची कोटी लिहा.

(i) $\sqrt{5}$ (ii) x° (iii) x^2 (iv) $\sqrt{2}\,m^{10} - 7$ (v) $2p - \sqrt{7}$

(vi) $7y - y^3 + y^5$ (vii) $xyz + xy - z$ (viii) $m^3n^7 - 3m^5n + mn$

5. खालील बहुपदींचे रेषीय, वर्ग व घन बहुपदी याप्रकारे वर्गीकरण करा.

(i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $5p$ (iii) $\sqrt{2}\ y - \frac{1}{2}$

(iv) $m^3 + 7m^2 + \frac{5}{2}m - \sqrt{7}$ (v) a^2 (vi) $3r^3$

6. खालील बहुपदी प्रमाण रूपात लिहा.

(i) $m^3 + 3 + 5m$ (ii) $- 7y + y^5 + 3y^3 - \frac{1}{2} + 2y^4 - y^2$

7. खालील बहुपदी सहगुणक रूपात लिहा.

(i) $x^3 - 2$ (ii) $5y$ (iii) $2m^4 - 3m^2 + 7$ (iv) $-\frac{2}{3}$

8. खालील सहगुणक रूपातील बहुपदी x चल वापरून प्रमाणरूपात लिहा.

(i) $(1, 2, 3)$ (ii) $(5, 0, 0, 0, - 1)$ (iii) $(- 2, 2, - 2, 2)$

9. खाली काही बहुपदी दिल्या आहेत. त्या बहुपदी दिलेल्या चौकटींत योग्य ठिकाणी लिहा.

$x + 7$,
x^2,
$x^3 + x^2 + x + 5$,
$2x^2 + 5x + 10$,
$x^3 + 9$,
$3x^2 + 5x$

वर्ग बहुपदी	दुविपदी
....	....

घन बहुपदी	त्रिपदी
....	....

रेषीय बहुपदी	एकपदी
....	....

जरा आठवूया.

(1) दोन सरूप बैजिक पदांची बेरीज किंवा वजाबाकी करताना त्यांच्या सहगुणकांची बेरीज किंवा वजाबाकी करतात. जसे, $5m^3 - 7m^3 = (5 - 7)m^3 = -2m^3$

(2) दोन बैजिक पदांचा गुणाकार किंवा भागाकार करताना त्यांच्या सहगुणकांचा गुणाकार किंवा भागाकार होतो. तसेच घातांकांच्या नियमांचाही उपयोग होतो.

जसे, $-4y^3 \times 2y^2z = -8y^5z$; $12a^2b \div 3ab^2 = \frac{4a}{b}$

जाणून घेऊया.

बहुपदींवरील क्रिया

बहुपदींची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या क्रिया बैजिक राशींवरील क्रियांप्रमाणेच करतात.

उदा (1) $7a^2 + 5a + 6$ मधून $5a^2 - 2a$ वजा करा.

उकल : $(7a^2 + 5a + 6) - (5a^2 - 2a)$

$$= 7a^2 + 5a + 6 - 5a^2 + 2a$$

$$= \underline{7a^2 - 5a^2} + \underline{5a + 2a} + 6$$

$$= 2a^2 + 7a + 6$$

उदा (2) $-2a \times 5a^2 = -10a^3$

उदा (3) $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) = ?$

उकल : $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2)$

$$\left.\begin{aligned} &= m^2(m^3 + 2m - 2) - 5(m^3 + 2m - 2) \\ &= m^5 + 2m^3 - 2m^2 - 5m^3 - 10m + 10 \end{aligned}\right\}$$ (पहिल्या बहुपदीतील प्रत्येक पदाने दुसऱ्या बहुपदीस गुणले.)

$= m^5 + 2m^3 - 5m^3 - 2m^2 - 10m + 10$ (सरूप पदांची एकत्र मांडणी केली.)

$= m^5 - 3m^3 - 2m^2 - 10m + 10$

गुणाकाराची कोटी 5 आहे हे लक्षात ठेवूया.

उदा (4) $3m^2n + 5mn^2 - 7mn$ आणि $2m^2n - mn^2 + mn$ यांची बेरीज करा.

उकल : $(3m^2n + 5mn^2 - 7mn) + (2m^2n - mn^2 + mn)$

$= 3m^2n + 5mn^2 - 7mn + 2m^2n - mn^2 + mn$

$= \underline{3m^2n + 2m^2n} + \underline{5mn^2 - mn^2} - \underline{7mn + mn}$ (सरूप पदांची एकत्र मांडणी केली.)

$= 5m^2n + 4mn^2 - 6mn$ (सरूप पदांची बेरीज केली.)

विचार करूया.

एका बहुपदीची कोटी 3 व दुसऱ्या बहुपदीची कोटी 5 असेल तर बहुपदींच्या गुणाकाराची कोटी किती असेल?

गुण्य व गुणक बहुपदींच्या कोटी आणि त्यांच्या गुणाकाराची कोटी यांच्यामध्ये कोणता संबंध असतो ?

उदा (5) $(2 + 2x^2) \div (x + 2)$ हा भागाकार करा आणि भाज्य = भाजक $\times$ भागाकार + बाकी या स्वरूपात उत्तर लिहा.

उकल : प्रथम $p(x) = 2 + 2x^2$ ही भाज्य बहुपदी प्रमाण रूपात लिहू

$\therefore \ 2 + 2x^2 = 2x^2 + 0x + 2$

रीत I :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x - 4 \\
\hline
x + 2 & 2x^2 + 0x + 2 \\
 & -\ 2x^2 + 4x \\
 & \quad\ - \quad - \\
\hline
 & \quad -4x + 2 \\
 & -\ \ -4x - 8 \\
 & \quad\ \ + \quad + \\
\hline
 & \qquad\quad 10
\end{array}
$$

भाज्य = भाजक $\times$ भागाकार + बाकी

$2 + 2x^2 = (x + 2) \times (2x - 4) + 10$

$q(x)$, भाजक = $(x + 2)$

$s(x)$, भागाकार = $2x - 4$ व $r(x)$, बाकी = 10

$\therefore \ p(x) = q(x) \times s(x) + r(x)$.

रीत II : भागाकाराची रेषीय पद्धती

$(2x^2 + 2) \div (x + 2)$ हा भागाकार करा.

$2x^2$ हे पद मिळवण्यासाठी $(x + 2)$ ला $2x$ ने गुणून $4x$ वजा करू.

$2x(x+2) - 4x = 2x^2$

$\therefore$ भाज्य = $2x^2 + 2 = 2x(x+2) - 4x + 2$ ...(I)

आता $-4x$ हे पद मिळवण्यासाठी $(x+2)$ ला -4 ने गुणू व 8 मिळवू.

$-4(x+2) + 8 = -4x$

$\therefore \ (2x^2 + 2) = 2x(x+2) - 4(x+2) + 8 + 2$ ...(I) वरून

$\therefore \ (2x^2 + 2) = (x + 2)(2x - 4) + 10$

भाज्य = भाजक $\times$ भागाकार + बाकी.

हे लक्षात ठेवूया.

युक्लिडचा भागाकार सिद्धांत

जर s(x) आणि $p(x)$ या दोन बहुपदी असतील आणि s(x) ची कोटी $p(x)$ च्या कोटीएवढी किंवा त्यापेक्षा जास्त असेल, आणि s(x) ला $p(x)$ ने भागून येणारा भागाकार $q(x)$ असेल, तर s$(x) = p(x)\ q(x) + r(x)$. येथे $r(x) = 0$ किंवा $r(x)$ ची कोटी $p(x)$ च्या कोटीपेक्षा कमी असते.

सरावसंच 3.2

(1) दिलेली अक्षरे वापरून उत्तरे लिहा.

(i) लाट गावात a झाडे आहेत. झाडांची संख्या दरवर्षी b ने वाढते, तर x वर्षानंतर त्या गावात किती झाडे असतील?

(ii) कवायतीसाठी एका रांगेत y मुले अशा x रांगा केल्या. तर कवायतीसाठी एकूण किती मुले हजर होती?

(iii) एका दोन अंकी संख्येच्या एकक व दशक स्थानचा अंक अनुक्रमे m व n आहे, तर ती दोन अंकी संख्या दर्शवणारी बहुपदी कोणती?

(2) खालील बहुपदींची बेरीज करा.

(i) $x^3 - 2x^2 - 9$; $5x^3 + 2x + 9$

(ii) $-7m^4 + 5m^3 + \sqrt{2}$; $5m^4 - 3m^3 + 2m^2 + 3m - 6$

(iii) $2y^2 + 7y + 5$; $3y + 9$; $3y^2 - 4y - 3$

(3) पहिल्या बहुपदीतून दुसरी बहुपदी वजा करा.

(i) $x^2 - 9x + \sqrt{3}$; $-19x + \sqrt{3} + 7x^2$

(ii) $2ab^2 + 3a^2b - 4ab$; $3ab - 8ab^2 + 2a^2b$

(4) खालील बहुपदींचा गुणाकार करा.

(i) $2x$; $x^2 - 2x - 1$ (ii) $x^5 - 1$; $x^3 + 2x^2 + 2$ (iii) $2y + 1$; $y^2 - 2y^3 + 3y$

(5) पहिल्या बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने भागा व उत्तर 'भाज्य = भाजक × भागाकार + बाकी' या रूपात लिहा.

(i) $x^3 - 64$; $x - 4$ (ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2$; $x^2 - x$

(6*) खालील माहिती पदावलीच्या रूपात लिहा. पदावलीला सोपे रूप द्या.

एका आयताकृती शेताची लांबी $(2a^2 + 3b^2)$ मीटर आणि रुंदी $(a^2 + b^2)$ मीटर आहे. शेतकऱ्याने शेतामध्ये $(a^2 - b^2)$ मीटर बाजू असलेल्या चौरसाकृती जागेवर घर बांधले, तर उरलेल्या शेताचे क्षेत्रफळ किती?

कृती : खालील उतारा वाचा व चौकटीत योग्य राशी लिहा व चर्चा करा.

शिरळस गावी कोरडवाहू शेती करणाऱ्या गोविंदचे 5 एकर शेत आहे. त्याच्या घरी पत्नी, 2 मुले व त्याची वृद्ध आई आहे. त्याने शेतीसाठी बँकेचे सव्वा लाख रुपये कर्ज, द.सा.द.शे. 10 या दराने घेतले. त्याने शेतातील x एकर जमिनीत सोयाबीन आणि y एकर जमिनीत कापूस व तूर यांचे पीक घेतले. शेतीसाठी आलेला खर्च पुढीलप्रमाणे आहे.

बियाणांसाठी त्याने एकूण रु.10,000 दिले. सोयाबीन पिकासाठी खते व कीटकनाशके यांसाठी 2000 x रुपये आणि मजुरी व मशागत यांसाठी 4000 x^2 रुपये खर्च झाला. कापूस व तूर या पिकांसाठी खते व कीटकनाशके यांचा खर्च 8000 y रुपये आणि मजुरी व मशागत यांसाठी 9000 y^2 रुपये खर्च झाला.

शेतीसाठी एकूण खर्च किती आला ते x आणि y वापरून लिहू.

$\boxed{} + \boxed{2000\,x} + \boxed{4000\,x^2} + \boxed{8000\,y} + \boxed{}$ रुपये

त्याच्या शेतात सोयाबीनचे उत्पन्न 5 x^2 क्विंटल निघाले. ते 2800 रु. प्रतिक्विंटल प्रमाणे विकले गेले.

कापसाचे उत्पन्न $\frac{5}{3}y^2$ क्विंटल निघाले व ते 5000 रु. प्रतिक्विंटलप्रमाणे विकले गेले.

तुरीचे उत्पन्न $4y$ क्विंटल निघाले व ते 4000 रु. प्रतिक्विंटलप्रमाणे विकले.

सर्व शेतमालाची विक्री झाल्यावर त्यातून किती रुपये एकूण उत्पन्न आले.

ते x आणि y च्या पदावली रूपात लिहू.

$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$ रुपये

जाणून घेऊया.

संश्लेषक भागाकार पद्धती (Synthetic Division)

एका बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने कसे भागायचे हे आपल्याला माहीत आहे. आता आपण भाजक $x + a$ किंवा $x - a$ बहुपदी असेल तर भागाकाराची सोपी पद्धत समजून घेऊ.

उदा (1) $(3x^3 + 2x^2 - 1)$ या बहुपदीला $(x + 2)$ ने भागा.

उकल : प्रथम भाज्य बहुपदी प्रमाण रूपात लिहून नंतर ती सहगुणक रूपात लिहू.

भाज्याचे प्रमाणरूप : $3x^3 + 2x^2 - 1 = 3x^3 + 2x^2 + 0\,x - 1$

$\therefore$ भाज्य बहुपदीचे सहगुणक रूप $= (3, 2, 0, -1)$

भाजक बहुपदी $= x + 2$

खालील पायऱ्यांनी संश्लेषक पद्धतीने भागाकार करू.

(1) बाजूला दाखवल्याप्रमाणे एक उभी व एक आडवी अशा दोन रेषा काढू.

$$\begin{array}{c|l} & \cdots\cdots\cdots\cdots \text{ पहिली ओळ} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \text{ दुसरी ओळ} \\ \hline & \cdots\cdots\cdots\cdots \text{ तिसरी ओळ} \end{array}$$

(2) भाजक $x + 2$ असून 2 ची विरुद्ध संख्या -2 आहे. $\therefore$ पहिल्या ओळीत उभ्या रेषेच्या डावीकडे -2 लिहू.आडव्या रेषेच्या वर पहिल्या ओळीत भाज्य बहुपदीचे सहगुणक रूप लिहू.

$$\begin{array}{c|cccc l} -2 & 3 & 2 & 0 & -1 & \text{पहिली ओळ} \\ & \downarrow & & & & \\ \hline & 3 & & & & \text{तिसरी ओळ} \end{array}$$

(3) आडव्या रेषेच्या खाली म्हणजे तिसऱ्या ओळीत भाज्यातील पहिला सहगुणक तसाच लिहू.

(4) तिसऱ्या ओळीतील 3 व भाजकातील -2 यांचा गुणाकार-6. हा दुसऱ्या ओळीतील 2 या सहगुणकाखाली लिहू. नंतर 2 आणि -6 यांची बेरीज -4 ही तिसऱ्या ओळीत खाली लिहू.

$$\begin{array}{c|cccc l} -2 & 3 & 2 & 0 & -1 & \\ & \downarrow & -6 & 8 & -16 & \\ \hline & 3 & -4 & 8 & \boxed{-17} & \text{बाकी} \end{array}$$

याप्रमाणे गुणाकार व बेरजा करून; शेवटची बेरीज करून आलेली संख्या ही भागाकारातील बाकी असते. येथे बाकी -17 आहे.

$(3, -4, 8)$ हे भागाकाराचे सहगुणक रूप होय.

$\therefore$ भागाकार $= 3x^2 - 4x + 8$ व बाकी $= -17$

$\therefore$ $3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$

या पद्धतीला **भागाकाराची संश्लेषक पद्धत** म्हणतात.

हा भागाकार रेषीय पद्धतीने पुढीलप्रमाणे करता येईल.

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 - 1 &= 3x^2 (x + 2) - 6x^2 + 2x^2 - 1 \\ &= 3x^2 (x + 2) - 4x^2 - 1 \\ &= 3x^2 (x + 2) - 4x^2 - 8x + 8x - 1 \\ &= 3x^2 (x + 2) - 4x (x + 2) + 8x - 1 \\ &= 3x^2 (x + 2) - 4x (x + 2) + 8x + 16 - 16 - 1 \\ &= 3x^2 (x + 2) - 4x (x + 2) + 8 (x + 2) - 17 \end{aligned}$$

$\therefore$ $3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$

उदा (2) $(2y^4 - 3y^3 + 5y - 4) \div (y - 1)$ हा भागाकार करा.

उकल : संश्लेषक पद्धत : भाज्य $= 2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^4 - 3y^3 + 0y^2 + 5y - 4$

भाजक $= y - 1$ -1 ची विरुद्ध संख्या 1 आहे.

1	2	- 3	0	5	- 4	
		2	- 1	- 1	4	
	2	- 1	- 1	4	$\boxed{0}$	बाकी

भागाकाराचे सहगुणक रूप $(2, -1, -1, 4)$ आहे.

$\therefore$ भागाकार $= 2y^3 - y^2 - y + 4$ व बाकी $= 0$

रेषीय पद्धत : $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^3(y - 1) + 2y^3 - 3y^3 + 5y - 4$

$$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y^2 + 5y - 4$$

$$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4y - 4$$

$$= (2y^3 - y^2 - y + 4)(y - 1)$$

हे लक्षात ठेवूया.

संश्लेषक पद्धतीने भागाकार करताना फक्त $x + a$ किंवा $x - a$ या रूपातील ज्या बहुपदीची कोटी 1 आहे असेच भाजक घेतले आहेत.

सरावसंच 3.3

1. खालील भागाकार संश्लेषक पद्धतीने आणि रेषीय पद्धतीने करा. भागाकार आणि बाकी लिहा.

(i) $(2m^2 - 3m + 10) \div (m - 5)$ (ii) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x + 2)$

(iii) $(y^3 - 216) \div (y - 6)$ (iv) $(2x^4 + 3x^3 + 4x - 2x^2) \div (x + 3)$

(v) $(x^4 - 3x^2 - 8) \div (x + 4)$ (vi) $(y^3 - 3y^2 + 5y - 1) \div (y - 1)$

जाणून घेऊया.

बहुपदीची किंमत (Value of polynomial)

बहुपदीतील चलाला एखादी किंमत दिली की त्या बहुपदीचीही एक किंमत मिळते. उदाहरणार्थ, $x + 7$ या बहुपदीत x ला 2 ही किंमत दिली, तर त्या बहुपदीची 9 ही किंमत मिळते.

$p(x)$ या बहुपदीत x ला a ही किंमत देऊन येणारी बहुपदीची किंमत $p(a)$ ने दर्शवतात.

उदा (1) $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ या बहुपदींची किंमत $x = 2$ असताना काढा.

बहुपदी $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$

या बहुपदीमध्ये $x = 2$ ठेवून,

$$\therefore p(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5$$
$$= 2 \times 4 - 6 + 5$$
$$= 8 - 6 + 5$$
$$\therefore p(2) = 7$$

उदा (2) $y = -2$ असताना बहुपदी $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$ ची किंमत काढा.

उकल : $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$

$$\therefore p(-2) = 2 \times (-2)^3 - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= 2 \times (-8) - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= -16 + 4 + \sqrt{7}$$
$$= -12 + \sqrt{7}$$

$\therefore$ $y = -2$ असताना बहुपदीची किंमत $-12 + \sqrt{7}$ आहे.

उदा (3) $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$ या बहुपदीकरिता $p(0)$ काढा.

उकल : $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$

$$\therefore p(0) = 2 \times 0^2 - 0^3 + 0 + 2$$
$$= 2 \times 0 - 0 + 0 + 2$$
$$= 2$$

उदा (4) जर $m^2 - am + 7$ या बहुपदीची किंमत $m = -1$ असताना 10 असेल, तर a ची किंमत काढा.

उकल : $p(m) = m^2 - am + 7$

$$\therefore p(-1) = (-1)^2 - a \times (-1) + 7$$
$$= 1 + a + 7$$
$$= 8 + a$$

परंतु $p(-1) = 10$ (दिलेले आहे.)

$$\therefore 8 + a = 10$$
$$\therefore a = 10 - 8$$
$$\therefore a = 2$$

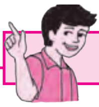
सरावसंच 3.4

(1) $x = 0$ असताना $x^2 - 5x + 5$ या बहुपदीची किंमत काढा.

(2) जर $p(y) = y^2 - 3\sqrt{2}y + 1$ तर $p(3\sqrt{2})$ काढा.

(3) जर $p(m) = m^3 + 2m^2 - m + 10$ तर $p(a) + p(-a) = ?$

(4) जर $p(y) = 2y^3 - 6y^2 - 5y + 7$ तर $p(2)$ काढा.



हे लक्षात ठेवूया.

चलाच्या एखाद्या किमतीसाठी बहुपदीची किंमत काढताना **प्रत्येक पदात** x च्या जागी दिलेली किंमत भरून त्या राशीची किंमत काढायची असते.

जाणून घेऊया.

शेष सिद्धांत (Remainder Theorem)

$p(x)$ या बहुपदीला $(x + a)$ ने भागल्यास उरणारी बाकी आणि या बहुपदीत x ला $-a$ ही किंमत देऊन येणारी त्या बहुपदीची किंमत यांचा परस्पर संबंध असतो. हा संबंध जाणण्यासाठी खालील उदाहरण अभ्यासा.

उदा. $p(x) = (4x^2 - x + 2)$ ला $(x + 1)$ ने भागा.

[येथे $(x + a)$ म्हणजे $(x + 1)$ आहे हे लक्षात ठेवूया.]

उकल : भाज्य बहुपदी $= 4x^2 - x + 2$

भाजक बहुपदी $= x + 1$

$$
\begin{array}{lrl}
\text{भागाकार} & & 4x - 5 \\
\text{भाजक} & x + 1 \big) & 4x^2 - x + 2 \quad \text{भाज्य} \\
 & - & 4x^2 + 4x \\
 & & - \quad - \\
\hline
 & & -5x + 2 \\
 & - & -5x - 5 \\
 & & + \quad + \\
\hline
 & & \qquad 7 \quad \text{बाकी}
\end{array}
$$

भागाकार $= 4x - 5$ व बाकी $= 7$ .... (I)

हेच उदाहरण संश्लेषक भागाकार पद्धतीने करू.

$p(x)$ चे सहगुणक रूप $= (4, -1, 2)$

भाजक बहुपदी $= x + 1$

1 ची विरुद्ध संख्या -1

$$
\begin{array}{r|rrl}
-1 & 4 & -1 & 2 \\
 & & -4 & 5 \\
\hline
 & 4 & -5 & \boxed{7} \ \text{बाकी}
\end{array}
$$

भागाकार $= 4x - 5$ बाकी $= 7$

आता आपण बाकी आणि भाज्य बहुपदीची किंमत यांमधील संबंध बघू.

भाज्य बहुपदीची म्हणजे $4x^2 - x + 2$ या बहुपदीची $x = -1$ असताना किंमत काढू.

$p(x) = 4x^2 - x + 2$

$\therefore\ p(-1) = 4 \times (-1)^2 - (-1) + 2$

$= 4 \times 1 + 1 + 2$

$= 4 + 1 + 2$

$= 7$

$\therefore\ x = -1$ असताना बहुपदी $p(x)$ ची किंमत 7 आहे. ...... (II)

म्हणून विधान (I) व (II) वरून, $p(x) = 4x^2 - x + 2$ या बहुपदीला $(x + a)$ ने म्हणजेच येथे $x + 1$ ने भागून मिळणारी बाकी आणि $x = -1$ असताना $p(x)$ या बहुपदीची किंमत म्हणजेच $p(-1)$ समान आहेत.

यावरून पुढील गुणधर्म लक्षात येतो.

$p(x)$ या बहुपदीला $(x + a)$ ने भागल्यास उरणारी **बाकी** ही $p(-a)$ एवढी,
म्हणजेच $p(x)$ मध्ये $x = -a$ मांडून येणाऱ्या **बहुपदींच्या किमतीएवढी** असते.

('शेष' या शब्दाचा अर्थ 'बाकी' असा आहे.)

या गुणधर्माला **शेष सिद्धांत** म्हणतात.

युक्लिडचा भागाकाराचा नियम वापरून हा गुणधर्म सिद्ध करू.

$p(x)$ ला $(x + a)$ ने भागल्यास

$p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ [$q(x)$ = भागाकार, $r(x)$ = बाकी]

जर, $r(x) \neq 0$, तर नियमाप्रमाणे $r(x)$ ची कोटी 1 पेक्षा कमी म्हणजे 0 आहे. म्हणून $r(x)$ ही वास्तव संख्या आहे.

$\therefore\ r(-a)$ ही सुद्धा वास्तव संख्या आहे.

आता, $p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ ....(1)

यामध्ये $x = -a$ किंमत घेऊन

$$p(-a) = q(-a) \times (a - a) + r(-a)$$

$$= q(-a) \times 0 + r(-a) \quad \text{.........(2)}$$

$\therefore\ p(-a) = r(-a)$ ....(1) आणि (2) वरून