कृती : खालील उदाहरणांचा पडताळा घ्या.

(1) $p(x) = 3x^2 + x + 7$ या बहुपदीस $x + 2$ या बहुपदीने भागा आणि बाकी काढा.

(2) $x = -2$ असताना $p(x) = 3x^2 + x + 7$ या बहुपदीची किंमत काढा.

(3) आता भागाकारात मिळालेली बाकी ही $p(-2)$ ची किंमत आहे का ?

आणखी एक उदाहरण घेऊन वरीलप्रमाणे पडताळा घ्या.

उदा (1) $x^4 - 5x^2 - 4x$ या बहुपदीस $x + 3$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा.

उकल : **शेष सिद्धांताने**

भाज्य बहुपदी $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

भाजक $= x + 3$

$\therefore\ x = -3$ घेऊ.

$\therefore\ p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

$p(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 - 4(-3)$

$= 81 - 45 + 12$

$p(-3) = 48$

संश्लेषक भागाकार पद्धतीने

प्रमाण रूप $x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 4x + 0$

सहगुणक रूप $= (1, 0, -5, -4, 0)$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-3 & 1 & 0 & -5 & -4 & 0 \\
 & & -3 & 9 & -12 & 48 \\
\hline
 & 1 & -3 & 4 & -16 & \boxed{48}
\end{array}\ \text{बाकी}$$

बाकी $= 48$

उदा (2) शेष सिद्धांताचा उपयोग करून $x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ या बहुपदीस $x - 1$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा.

उकल : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

भाजक $= x - 1$ $\quad\therefore\ x = 1$ घेऊ.

$\therefore$ शेष सिद्धांतानुसार बाकी $= p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1$

$= 1 - 2 \times 1 - 4 - 1$

$p(1) = 1 - 2 - 4 - 1 = -6$

$\therefore$ शेषसिद्धांतानुसार बाकी $= -6$

उदा (3) जर $t^3 - 3t^2 + kt + 50$ या बहुपदीस $(t-3)$ ने भागल्यावर बाकी 62 उरत असेल, तर k ची किंमत काढा.

उकल : दिलेल्या बहुपदीला $(t-3)$ ने भागल्यावर बाकी 62 उरते हे दिले आहे. म्हणून दिलेल्या भाज्य बहुपदीची किंमत $t = 3$ असताना काढू.

$p(t) = t^3 - 3t^2 + kt + 50$

$\therefore$ शेष सिद्धांतानुसार

बाकी $= p(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + k \times 3 + 50$

$= 27 - 3 \times 9 + 3k + 50$

$= 27 - 27 + 3k + 50$

$= 3k + 50$

परंतु बाकी 62 दिली आहे.

$\therefore\ 3k + 50 = 62$

$\therefore\ 3k = 62 - 50$

$\therefore\ 3k = 12$

$\therefore\ k = \frac{12}{3}$

$\therefore\ k = 4$

हे लक्षात ठेवूया.

शेष सिद्धांत : $p(x)$ ही कोणतीही बहुपदी असून 'a' ही वास्तव संख्या असेल आणि जर $p(x)$ ला $(x + a)$ ने भागले तर येणारी बाकी ही $p(-a)$ एवढी असते.

$p(x) = s(x)\ (x - a) + r(x)$ $\qquad$ $r(x)$ ची कोटी < 1 किंवा $r(x) = 0$

या समीकरणात $x = a$ घालून $p(a) = 0 + r\ (a) = r\ (a)$ मिळते.

$\therefore\ r(a)$ ची कोटी $= 0$ किंवा $r(a) = 0$ म्हणजेच $(x - a)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे असे लक्षात येते.

जाणून घेऊया.

अवयव सिद्धांत (Factor Theorem)

जर 21 ला 7 ने भागले तर बाकी 0 येते. म्हणून आपण 7 हा 21 चा अवयव आहे असे म्हणतो.

त्याचप्रमाणे दिलेल्या बहुपदीला भाजक बहुपदीने भागल्यास बाकी 0 आली तर ती बहुपदी दिलेल्या बहुपदीचा अवयव आहे असे म्हणतात.

उदा (1) $p(x) = (x^3 + 4x - 5)$ या बहुपदीस $(x - 1)$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा.

$(x - 1)$ हा $p(x)$चा अवयव आहे का हे ठरवा.

उकल : $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$p(1) = (1)^3 + 4(1) - 5$

$= 1 + 4 - 5$

$= 0$

येथे, शेष सिद्धांतानुसार बाकी $= 0$

$\therefore\ (x - 1)$ हा $p(x)$ या बहुपदीचा अवयव आहे.

उदा (2) $p(x) = x^3 + 4x - 5$ या बहुपदीला $x + 2$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा.

$(x + 2)$ हा $p(x)$चा अवयव आहे का हे ठरवा.

उकल : $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$p(-2) = (-2)^3 + 4(-2) - 5$

$p(-2) = -8 - 8 - 5$

$= -21$

शेष सिद्धांतानुसार बाकी -21 आली.

येथे बाकी $\neq 0$

$\therefore\ (x + 2)$ हा $p(x)$ या बहुपदीचा अवयव नाही.

कृती : $(x - 1)$ हा $x^3 + 4x - 5$ या बहुपदीचा अवयव आहे का हे पडताळा.

हे लक्षात ठेवूया.

$p(x)$ ही बहुपदी असून a ही कोणतीही वास्तव संख्या असेल आणि जर $p(a) = 0$ असेल तर $(x - a)$ हा $p(x)$ चा अवयव असतो.

याउलट $(x - a)$ हा $p(x)$ या बहुपदीचा अवयव असेल तर $p(a) = 0$ असते.

उदा (1) अवयव सिद्धांताचा उपयोग करून, $x - 2$ हा $x^3 - x^2 - 4$ या बहुपदीचा अवयव आहे का ते ठरवा.

उकल : $p(x) = x^3 - x^2 - 4$ भाजक $= x - 2$

$\therefore p(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

$\therefore$ अवयव सिद्धांतानुसार, $(x - 2)$ हा $(x^3 - x^2 - 4)$ या बहुपदीचा अवयव आहे.

उदा (2) जर $(x - 1)$ हा $(x^3 - 2x^2 + mx - 4)$ चा अवयव असेल तर m ची किंमत काढा.

उकल : $(x - 1)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे. $\therefore p(1) = 0$

$p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$

$p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + m \times 1 - 4 = 0$

$\therefore 1 - 2 \times 1 + m - 4 = 0$

$\therefore 1 - 2 + m - 4 = 0 \qquad \therefore m - 5 = 0 \qquad \therefore m = 5$

कृती : आपण कोरडवाहू शेती करणाऱ्या गोविंदच्या शेतीच्या संदर्भात बहुपदींच्या रूपात शेतीचा खर्च व उत्पन्न या बाबी पाहिल्या होत्या. त्याने बँकेचे कर्ज सव्वा लाख रुपये घेतले व ते 10% व्याजदराने परत केले होते. बियाणांसाठी खर्च 10,000 रुपये, सोयाबीनच्या पिकासाठी खते-कीटकनाशकांसाठी $2000x$ रुपये व त्याच्या मशागतीसाठी $4000x^2$ रुपये खर्च आला होता. कापूस व तूर या पिकांसाठी खते-कीटकनाशकांसाठी $8000y$ रुपये व मशागतीसाठी $9000y^2$ रुपये एवढा खर्च केला होता.

एकूण उत्पन्न $14000x^2 + \frac{25000}{3}y^2 + 16000y$ एवढे झाले.

$x = 2, y = 3$ या किमती घेऊन गोविंदच्या शेतीचा जमाखर्च लिहून काढा.

उकल : **जमा** **खर्च**

जमा		खर्च	
1,25,000 रुपये	बँकेचे कर्ज	1,37,000 रुपये	बँकेची व्याजासह परतफेड.
₹ ☐	सोयाबीनचे उत्पन्न	₹ ☐	बियाणांसाठी
₹ ☐	कापसाचे उत्पन्न	₹ ☐	सोयाबीन:खते व कीटकनाशके
₹ ☐	तुरीचे उत्पन्न	₹ ☐	सोयाबीन: मजुरी व मशागत
₹ ☐	एकूण जमा	₹ ☐	कापूस व तूर : खते व कीटकनाशके
		₹ ☐	कापूस व तूर : मजुरी व मशागत
		₹ ☐	एकूण खर्च

सरावसंच 3.5

(1) x ची दिलेली किंमत घेऊन $2x - 2x^3 + 7$ या बहुपदीची किंमत काढा.

(i) $x = 3$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 0$

(2) खालील प्रत्येक बहुपदीकरिता $p(1)$, $p(0)$ आणि $p(-2)$ काढा.

(i) $p(x) = x^3$ (ii) $p(y) = y^2 - 2y + 5$ (iii) $p(x) = x^4 - 2x^2 - x$

(3) जर $m^3 + 2m + a$ या बहुपदीची किंमत $m = 2$ असताना 12 आहे, तर a ची किंमत काढा.

(4) जर $mx^2 - 2x + 3$ या बहुपदीकरता $p(-1) = 7$ असेल तर m ची किंमत काढा.

(5) खालीलपैकी पहिल्या बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने भागल्यास, येणारी बाकी शेष सिद्धांताचा उपयोग करून काढा.

(i) $(x^2 - 7x + 9)$; $(x + 1)$

(ii) $(2x^3 - 2x^2 + ax - a)$; $(x - a)$

(iii) $(54m^3 + 18m^2 - 27m + 5)$; $(m - 3)$

(6) $y^3 - 5y^2 + 7y + m$ या बहुपदीस $y + 2$ ने भागल्यास बाकी 50 उरते, तर m ची किंमत काढा.

(7) अवयव सिद्धांताचा उपयोग करून, $x + 3$ हा $x^2 + 2x - 3$ चा अवयव आहे का ते ठरवा.

(8) जर $x - 2$ हा $x^3 - mx^2 + 10x - 20$ या बहुपदीचा अवयव असेल तर m ची किंमत काढा.

(9) खालील उदाहरणात $q(x)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे किंवा नाही हे अवयव सिद्धांताने ठरवा.

(i) $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $q(x) = x - 1$

(ii) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 45$, $q(x) = x - 3$

(10) $(x + 1)$ ने $(x^{31} + 31)$ ला भागल्यास येणारी बाकी काढा.

(11) $m - 1$ हा $m^{21} - 1$ व $m^{22} - 1$ या बहुपदींचा अवयव आहे हे दाखवा.

(12*) जर $x - 2$ आणि $x - \frac{1}{2}$ हे दोन्ही $nx^2 - 5x + m$ या बहुपदीचे अवयव असतील तर दाखवा की $m = n = 2$

(13) (i) जर $p(x) = 2 + 5x$ तर $p(2) + p(-2) - p(1)$ काढा.

(ii) जर $p(x) = 2x^2 - 5\sqrt{3}x + 5$ तर $p(5\sqrt{3})$ काढा.

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत आपण बहुपदींचे अवयव कसे काढावे याचा अभ्यास केला आहे. काही उदाहरणे पाहू. अवयव काढा.

उदा (1) $4x^2 - 25$

$= (2x)^2 - (5)^2$

$= (2x + 5)(2x - 5)$

उदा (2) $3x^2 + 7x + 2$

$= \underline{3x^2 + 6x} + \underline{x + 2}$

$= 3x(x + 2) + 1(x + 2)$

$= (x + 2)(3x + 1)$

उदा (3) $63x^2 + 5x - 2$

$= 63x^2 + 14x - 9x - 2$

$= 7x(9x + 2) - 1(9x + 2)$

$= (9x + 2)(7x - 1)$

उदा (4) $6x^2 - 5x - 6$

$= 6x^2 - 9x + 4x - 6$

$= 3x(2x - 3) + 2(2x - 3)$

$= (2x - 3)(3x + 2)$

जाणून घेऊया.

बहुपदींचे अवयव (Factors of polynomials)

काही वेळा दिलेल्या बहुपदीचे रूपांतर $ax^2 + bx + c$ असे करता येते. त्यामुळे तिचे अवयव शोधणे सोपे जाते.

उदा (1) $(y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50$ चे अवयव काढा.

उकल : दिलेल्या बहुपदीत $(y^2-3y) = x$ मानू.

$\therefore\ (y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50 = x^2 - 5x - 50$

$= x^2 - 10x + 5x - 50$

$= x(x - 10) + 5(x - 10)$

$= (x - 10)(x + 5)$

$= (y^2-3y - 10)(y^2-3y + 5)$

$= [y^2-5y + 2y - 10](y^2-3y + 5)$

$= [y(y - 5) + 2(y - 5)](y^2-3y + 5)$

$= (y - 5)(y + 2)(y^2-3y + 5)$

उदा (2) अवयव पाडा.

$(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

उकल : $(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

$= (x + 2)(x - 7)(x - 3)(x - 2) + 64$

$= (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 6) + 64$

$= (m - 14)(m + 6) + 64$ . . . . ($x^2 - 5x$ साठी m मानून.)

$= m^2 - 14m + 6m - 84 + 64$

$= m^2 - 8m - 20$

$= (m - 10)(m + 2)$

$= (x^2 - 5x - 10)(x^2 - 5x + 2)$ .... m च्या जागी $x^2 - 5x$ लिहून

सरावसंच 3.6

(1) खालील बहुपदींचे अवयव काढा.

(i) $2x^2 + x - 1$ (ii) $2m^2 + 5m - 3$ (iii) $12x^2 + 61x + 77$

(iv) $3y^2 - 2y - 1$ (v) $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}$ (vi) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

(2) खालील बहुपदींचे अवयव काढा.

(i) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$ (ii) $(x - 5)^2 - (5x - 25) - 24$

(iii) $(x^2 - 6x)^2 - 8(x^2 - 6x + 8) - 64$ (iv) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 5) - 35$

(v) $(y + 2)(y - 3)(y + 8)(y + 3) + 56$

(vi) $(y^2 + 5y)(y^2 + 5y - 2) - 24$

(vii) $(x - 3)(x - 4)^2(x - 5) - 6$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

(1) खालील प्रत्येक प्रश्नासाठी दिलेल्या पर्यायांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(i) खालीलपैकी बहुपदी कोणती ?

(A) $\frac{x}{y}$ (B) $x^{\sqrt{2}} - 3x$ (C) $x^{-2} + 7$ (D) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}$

(ii) $\sqrt{7}$ या बहुपदीची कोटी किती ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 5 (C) 2 (D) 0

(iii) 0 बहुपदीची कोटी किती असते ?

(A) 0 (B) 1 (C) निश्चित करता येत नाही (D) कोणतीही वास्तव संख्या

(iv) $2x^2 + 5x^3 + 7$ या बहुपदीची कोटी किती ?

(A) 3 (B) 2 (C) 5 (D) 7

(v) $x^3 - 1$ या बहुपदीचे सहगुणक रूप कोणते ?

(A) $(1, -1)$ (B) $(3, -1)$ (C) $(1, 0, 0, -1)$ (D) $(1, 3, -1)$

(vi) $p(x) = x^2 - 7\sqrt{7}x + 3$ तर $p(7\sqrt{7}) = $?

(A) 3 (B) $7\sqrt{7}$ (C) $42\sqrt{7} + 3$ (D) $49\sqrt{7}$

(vii) $2x^3 + 2x$ या बहुपदीची $x = -1$ असताना किंमत किती ?

(A) 4 (B) 2 (C) -2 (D) -4

(viii) $3x^2 + mx$ या बहुपदीचा $x - 1$ हा अवयव असेल तर m ची किंमत किती ?

(A) 2 (B) -2 (C) -3 (D) 3

(ix) $(x^2 - 3)(2x - 7x^3 + 4)$ हा गुणाकार करून मिळणाऱ्या बहुपदीची कोटी किती ?

(A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 0

(x) खालीलपैकी रेषीय बहुपदी कोणती ?

(A) $x+5$ (B) x^2+5 (C) x^3+5 (D) x^4+5

(2) खालील प्रत्येक बहुपदीची कोटी लिहा.

(i) $5+3x^4$ (ii) 7 (iii) ax^7+bx^9 {a, b या स्थिर संख्या आहेत.}

(3) खालील बहुपदी प्रमाण रूपात लिहा.

(i) $4x^2+7x^4-x^3-x+9$ (ii) $p+2p^3+10p^2+5p^4-8$

(4) खालील बहुपदी सहगुणक रूपात लिहा.

(i) x^4+16 (ii) $\mathrm{m}^5+2\mathrm{m}^2+3\mathrm{m}+15$

(5) खालील सहगुणक रूपातील बहुपदी x हे चल वापरून घातांक रूपात लिहा.

(i) (3, −2, 0, 7, 18) (ii) (6, 1, 0, 7) (iii) (4, 5, −3, 0)

(6) बेरीज करा.

(i) $7x^4-2x^3+x+10$; $3x^4+15x^3+9x^2-8x+2$ (ii) $3p^3q+2p^2q+7$; $2p^2q+4pq-2p^3q$

(7) वजाबाकी करा.

(i) $5x^2-2y+9$; $3x^2+5y-7$ (ii) $2x^2+3x+5$; x^2-2x+3

(8) खालील गुणाकार करा.

(i) $(m^3-2m+3)(m^4-2m^2+3m+2)$ (ii) $(5m^3-2)(m^2-m+3)$

(9) $3x^3-8x^2+x+7$ या बहुपदीला $x-3$ या बहुपदीने संश्लेषक पद्धतीने भागा व बाकी काढा.

(10) m च्या कोणत्या किमतीकरिता $x+3$ हा $x^3-2mx+21$ या बहुपदीचा अवयव असेल?

(11) 2016 वर्षाच्या शेवटी कोवाड, वरूड व चिखली गावांची लोकसंख्या अनुक्रमे $5x^2-3y^2$, $7y^2+2xy$ आणि $9x^2+4xy$ होती. 2017 वर्षाच्या सुरुवातीला तीनही गावांतून शिक्षण व रोजगाराकरिता अनुक्रमे x^2+xy-y^2, $5xy$ व $3x^2+xy$ माणसे दुसऱ्या गावी गेली. तर 2017 च्या सुरुवातीला त्या गावांची एकूण लोकसंख्या किती होती ?

(12) bx^2+x+5 व bx^3-2x+5 या बहुपदींना $x-3$ ने भागल्यास येणारी बाकी अनुक्रमे m व n असेल आणि जर $m-n=0$ असेल तर b ची किंमत काढा.

(13) सरळरूप द्या. $(8m^2+3m-6)-(9m-7)+(3m^2-2m+4)$

(14) $x^2+13x+7$ मधून कोणती बहुपदी वजा करावी म्हणजे $3x^2+5x-4$ ही बहुपदी मिळेल?

(15) $4m+2n+3$ या राशीत कोणती राशी मिळवावी म्हणजे $6m+3n+10$ ही बहुपदी मिळेल?

4 गुणोत्तर व प्रमाण

चला, शिकूया.

- गुणोत्तर
- गुणोत्तराचे गुणधर्म
- समान गुणोत्तरांवरील क्रिया
- समान गुणोत्तरांचा सिद्धांत
- परंपरित प्रमाण
- गुणोत्तरातील k पद्धती

जरा आठवूया.

आपण मागील इयत्तांमध्ये गुणोत्तर व प्रमाण यांचा अभ्यास केला आहे. त्यावर आधारित उदाहरणेही आपण सोडवली आहेत.

उदा विमलने तयार केलेले रव्याचे लाडू रुचकर असतात. ती एक वाटी तूप, 3 वाट्या रवा आणि 2 वाट्या साखर घेऊन लाडू बनविते.

येथे रवा आणि साखर यांचे प्रमाण 3:2 किंवा $\frac{3}{2}$ आहे.

जर लाडवांसाठी 12 वाट्या रवा घेतला तर किती साखर लागेल?

साखर x वाट्या लागेल असे मानू. यावरून $\frac{3}{2} = \frac{12}{x}$ $\therefore 3x = 24$ $\therefore x = 8$

म्हणजे 12 वाट्या रवा घेऊन लाडू करण्यासाठी 8 वाट्या साखर लागेल.

हेच उदाहरण पुढीलप्रमाणेही करता येते.

रवा $3k$ वाट्या असेल तर साखर $2k$ वाट्या लागेल. कारण $\frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}$

$3k = 12$ असेल तर $k = 4$ $\therefore 2k = 8$ वाट्या साखर लागेल.

जाणून घेऊया.

गुणोत्तर व प्रमाण (Ratio and proportion)

दोन संख्यांच्या गुणोत्तराची संकल्पना तीन किंवा अधिक संख्यांसाठी विस्तारित करता येते. लाडवांचे उदाहरण पाहा. तूप, रवा आणि साखर यांचे प्रमाण 1 : 3 : 2 आहे.

येथे तूप व रवा यांचे गुणोत्तर 1 : 3 आणि रवा व साखर यांचे गुणोत्तर 3 : 2 आहे. ही माहिती एकाच प्रमाणाने दिली आहे.

तूप 1k = k वाटी, रवा 3k वाट्या आणि साखर 2k वाट्या असे मानता येईल.

आता 12 वाट्या रवा असेल तर लाडवांसाठी किती वाट्या तूप व किती वाट्या साखर लागेल हे काढता येईल.

कारण $3k = 12$ $\therefore$ $k = 4$ आणि $2k = 8$ म्हणजे 4 वाट्या तूप आणि 8 वाट्या साखर लागेल.

हीच कल्पना चार वा अधिक बाबींच्या प्रमाणासाठी देखील वापरता येते.

जर a, b, c, d या चार संख्यांचे प्रमाण $2 : 3 : 7 : 4$ असे असेल तर त्या संख्या $2m$, $3m$, $7m$, $4m$ मानू. दिलेली माहिती वापरून m ची किंमत काढता येईल. उदाहरणार्थ, या चार संख्यांची बेरीज 48 असेल तर त्या चार संख्या काढू.

$2m + 3m + 7m + 4m = 16\,m = 48$

$\therefore \quad m = 3$

$\therefore \quad 2m = 6,\ 3m = 9,\ 7m = 21,\ 4m = 12$ अशा संख्या मिळाल्या.

$\therefore$ इष्ट संख्या = 6, 9, 21, 12

उदा (1) खताच्या 18 : 18 : 10 या प्रकारामध्ये नायट्रोजनची संयुगे 18%, फॉस्फरसची संयुगे 18% आणि पोटॅशियमची संयुगे 10% असतात. उरलेला भाग इतर पदार्थांचा असतो. तर त्या प्रकारच्या 20 किलोग्रॅम खतामध्ये प्रत्येक प्रकारच्या संयुगाचे वस्तुमान किती असेल ?

उकल : 20 किग्रॅ खतातील नायट्रोजनच्या संयुगाचे वस्तुमान x किग्रॅ मानू.

$$\therefore \quad \frac{18}{100} = \frac{x}{20} \qquad \therefore \quad x = \frac{18 \times 20}{100} = 3.6$$

$\therefore$ नायट्रोजनचे संयुग 3.6 किग्रॅ असेल.

फॉस्फरसच्या संयुगाचे शतमान 18 हेच असते. $\therefore$ फॉस्फरसचे संयुग 3.6 किग्रॅ असेल.

20 किग्रॅ खतातील पोटॅशियमच्या संयुगाचे वस्तुमान y किग्रॅ मानल्यास

$\frac{10}{100} = \frac{y}{20} \qquad \therefore y = 2 \qquad$ $\therefore$ पोटॅशियमचे संयुग 2 किग्रॅ असेल.

समप्रमाण

एक मोटरगाडी 1 लीटर पेट्रोलमध्ये 10 किमी अंतर जाते.

म्हणून 20 लीटर पेट्रोलमध्ये ती गाडी $20 \times 10 = 200$ किमी अंतर कापेल.

तर 40 लीटर पेट्रोलमध्ये तीच गाडी $40 \times 10 = 400$ किमी अंतर जाईल.

वरील माहिती सारणी रूपात लिहू.

पेट्रोल : x लीटर	1	20	40	
अंतर : y किमी	10	200	400	
$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$	$\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$	$\frac{x}{y} = k$

गाडीने वापरलेले पेट्रोल (लीटरमध्ये) आणि तेवढ्या पेट्रोलमध्ये कापलेले अंतर (किलोमीटरमध्ये) या राशींचे गुणोत्तर स्थिर आहे. अशा वेळी त्या दोन राशी समप्रमाणात आहेत, म्हणजेच या दोन राशी समचलनात बदलतात असे म्हणतात.

व्यस्तप्रमाण

एका मोटारीला ताशी 50 किमी वेगाने 100 किमी जाण्यास दोन तास लागतात. एका बैलगाडीचा वेग ताशी 5 किमी आहे, तर तेवढेच अंतर जाण्यास बैलगाडीला 20 तास लागतात.

$\therefore$ वेग $\times$ वेळ = अंतर हे लक्षात घेऊन वरील माहिती सारणी रूपात लिहू.

	वेग/ताशी x	वेळ y	$x \times y$	$x \times y = \mathrm{k}$
मोटार	50	2	100	
बैलगाडी	5	20	100	

म्हणजे वाहनाचा वेग आणि प्रवासाला लागणारा वेळ यांचा गुणाकार स्थिर आलेला दिसतो. अशा वेळी त्या राशी व्यस्त प्रमाणात आहेत, किंवा त्या राशी व्यस्त चलनात बदलतात असे म्हणतात.

वरील उदाहरणात, वाहनाचा वेग आणि ठरावीक अंतर जाण्यास लागणारा वेळ हे व्यस्त प्रमाणात आहेत.

जरा आठवूया.

गुणोत्तराचे गुणधर्म

(1) a आणि b या दोन संख्यांचे गुणोत्तर $a : b$ किंवा $\frac{a}{b}$ अशा स्वरूपात लिहिता येते. येथे a ला पूर्वपद (पहिले पद) आणि b ला उत्तर पद (दुसरे पद) म्हणतात.

(2) दोन संख्यांच्या गुणोत्तरात उत्तरपद 100 असते तेव्हा त्या गुणोत्तरास शतमान असे म्हणतात.

(3) प्रमाणातील सर्व संख्यांना एकाच शून्येतर संख्येने गुणले किंवा भागले तर ते प्रमाण बदलत नाही.

उदा. 3:4 = 6:8 = 9:12 तसेच 2:3:5 = 8:12:20 किंवा k ही शून्येतर संख्या असेल, तर

$a : b = ak : bk$ $\qquad$ $a : b : c = ak : bk : ck$

(4) ज्या संख्यांचे गुणोत्तर काढायचे आहे त्या एकाच प्रकारच्या मापनाच्या असल्या तर प्रत्येकीच्या मापनाचे एकक समान असले पाहिजे.

(5) गुणोत्तराला एकक नसते.

जसे, 2 किलोग्रॅम व 300 ग्रॅम यांचे गुणोत्तर 2:300 नसते परंतु 2 किलोग्रॅम = 2000 ग्रॅम म्हणून ते गुणोत्तर 2000 : 300 म्हणजेच 20:3 आहे.

उदा (1) सीमाच्या व राजश्रीच्या वयांचे गुणोत्तर 3 : 1 आहे. राजश्रीच्या व अतुलच्या वयांचे गुणोत्तर 2 : 3 आहे. तर सीमा, राजश्री आणि अतुल यांच्या वयांचे गुणोत्तर काढा.

उकल : सीमाचे वय : राजश्रीचे वय = 3 : 1 $\qquad$ राजश्रीचे वय : अतुलचे वय = 2 : 3

पहिल्या गुणोत्तराचे उत्तरपद हे दुसऱ्या गुणोत्तरातील पूर्वपद असायला हवे.

यासाठी म्हणजे सलग गुणोत्तर मिळवण्यासाठी पहिल्या गुणोत्तरातील पदांना 2 ने गुणू म्हणजे 3:1 = 6:2 मिळेल.

$$\frac{\text{सीमाचे वय}}{\text{राजश्रीचे वय}} = \frac{6}{2}, \quad \frac{\text{राजश्रीचे वय}}{\text{अतुलचे वय}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ सीमाचे वय : राजश्रीचे वय : अतुलचे वय हे गुणोत्तर 6 : 2 : 3 असे आहे.

उदा (2) एका आयताकृती शेताची लांबी 1.2 किमी असून त्याची रुंदी 400 मी आहे, तर लांबीचे रुंदीशी गुणोत्तर काढा.

उकल : येथे लांबी किलोमीटरमध्ये व रुंदी मीटरमध्ये आहे. गुणोत्तरासाठी दोन्ही एकके समान हवीत म्हणून किलोमीटरचे मीटरमध्ये रूपांतर करू.

1.2 किमी = 1.2×1000 = 1200 मीटर $\therefore$ 1200 मीटरचे 400 मीटरशी गुणोत्तर घेऊ.

अपेक्षित गुणोत्तर = $\frac{1200}{400} = \frac{3}{1}$, म्हणजेच 3:1 आहे.

उदा (3) महेश यांच्या दरमहा खर्चाचे त्यांच्या उत्पन्नाशी असलेले गुणोत्तर 3:5 आहे, तर त्यांचा खर्च त्यांच्या उत्पन्नाच्या शेकडा किती आहे ?

उकल : खर्चाचे उत्पन्नाशी असलेले गुणोत्तर 3:5 आहे. याचे शतमानात रूपांतर करायचे म्हणजे दुसरे पद 100 करायचे.

$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 20}{5 \times 20} = \frac{60}{100}$ म्हणजे $\frac{\text{खर्च}}{\text{उत्पन्न}} = \frac{60}{100} = 60\%$ $\therefore$ महेश यांचा खर्च उत्पन्नाच्या 60% आहे.

उदा (4) एका बागेत आंबा व चिकूच्या झाडांच्या संख्यांचे गुणोत्तर 2:3 आहे. जर त्या बागेत प्रत्येक प्रकारची 5 झाडे जास्त लावली असती तर त्यांच्या संख्यांचे गुणोत्तर 5 : 7 झाले असते. तर त्या बागेत आंब्याची व चिकूची झाडे किती आहेत?

उकल : सुरुवातीचे गुणोत्तर 2 : 3 आहे.

बागेतील आंब्याची झाडे = $2x$ व चिकूची झाडे = $3x$ मानू.

दिलेल्या अटीनुसार, $\frac{2x+5}{3x+5} = \frac{5}{7}$

$$14x + 35 = 15x + 25$$

$$\therefore x = 10$$

$\therefore$ बागेतील आंब्याची झाडे = $2x = 2 \times 10 = 20$

$\therefore$ बागेतील चिकूची झाडे = $3x = 3 \times 10 = 30$

उदा (5) दोन संख्यांचे गुणोत्तर 5 : 7 आहे. जर प्रत्येक संख्येत 40 मिळवले तर येणाऱ्या बेरजांचे गुणोत्तर 25 : 31 होते. तर त्या संख्या काढा.

उकल : पहिली संख्या = $5x$ आणि दुसरी संख्या = $7x$ मानू.

दिलेल्या अटीवरून.

$$\frac{5x+40}{7x+40}=\frac{25}{31}$$

$$31(5x+40)=25(7x+40)$$

$$155x+1240=175x+1000$$

$$1240-1000 = 175x-155x$$

$$240=20x$$

$$x=12$$

$\therefore$ पहिली संख्या = $5 \times 12 = 60$

दुसरी संख्या = $7 \times 12 = 84$

$\therefore$ दिलेल्या संख्या 60 व 84 आहेत.

सरावसंच 4.1

(1) खाली दिलेल्या संख्यांच्या जोड्यांमधील पहिल्या संख्येचे दुसऱ्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) 72, 60 (ii) 38,57 (iii) 52,78

(2) पुढील राशींपैकी पहिल्या राशीचे दुसऱ्या राशीशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) 700 रुपये, 308 रुपये (ii) 14 रु, 12 रु. 40 पै.

(iii) 5 लीटर, 2500 मिलिलीटर (iv) 3 वर्षे 4 महिने, 5 वर्षे 8 महिने

(v) 3.8 किलोग्रॅम, 1900 ग्रॅम (vi) 7 मिनिटे 20 सेकंद, 5 मिनिटे 6 सेकंद.

(3) पुढील शतमाने संक्षिप्त गुणोत्तरांच्या रूपात लिहा.

(i) 75 : 100 (ii) 44 : 100 (iii) 6.25% (iv) 52 : 100 (v) 0.64%

(4) एक लहान घर 3 माणसे 8 दिवसांत बांधू शकतात, तर तेच घर 6 दिवसांत बांधण्यास किती माणसे लागतील ?

(5) पुढील गुणोत्तरांचे शतमानात रूपांतर करा.

(i) 15 : 25 (ii) 47 : 50 (iii) $\frac{7}{10}$ (iv) $\frac{546}{600}$ (v) $\frac{7}{16}$

(6) आभा आणि तिची आई यांच्या वयांचे गुणोत्तर 2:5 आहे. आभाच्या जन्माच्या वेळी तिच्या आईचे वय 27 वर्षे होते. तर आभा आणि तिची आई यांची आजची वये काढा.

(7) वत्सला व सारा यांची आजची वये अनुक्रमे 14 वर्षे व 10 वर्षे आहेत; किती वर्षांनी त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर 5:4 होईल ?

(8) रेहाना व तिची आई यांच्या आजच्या वयांचे गुणोत्तर 2 : 7 आहे. 2 वर्षांनी त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर 1 : 3 होईल. तर रेहानाचे आजचे वय किती ?

जाणून घेऊया.

गुणोत्तरांची तुलना

जर $b > 0, d > 0$ तर $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ या गुणोत्तरांची तुलना पाहू. ही तुलना खालील नियमांनुसार करता येते.

(i) जर $ad > bc$ तर $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (ii) जर $ad < bc$ तर $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (iii) जर $ad = bc$ तर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

खाली दिलेल्या गुणोत्तरांच्या प्रत्येक जोडीतील क्रमसंबंध ठरवा.

उदा (1) $\frac{4}{9}, \frac{7}{8}$

उकल : $4 \times 8 \; \boxed{?} \; 7 \times 9$

$32 < 63$

$\therefore \quad \frac{4}{9} < \frac{7}{8}$

उदा (2) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{13} \times \sqrt{5}, \quad \boxed{?} \quad \sqrt{8} \times \sqrt{7}$

$\sqrt{65} \quad \boxed{?} \quad \sqrt{56}$

$\sqrt{65} \quad > \quad \sqrt{56}$

$\therefore \quad \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} > \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

उदा (3) जर a व b पूर्णांक संख्या असतील आणि $a < b$, $b > 1$ तर $\frac{a-1}{b-1}, \frac{a+1}{b+1}$ या गुणोत्तरांतील क्रमसंबंध ठरवा.

उकल : $a < b$

$\therefore \; a - 1 < b - 1$ आता $\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1}$ या वजाबाकीचा विचार करू.

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{(a-1)(b+1)-(a+1)(b-1)}{(b-1)(b+1)}$$

$$= \frac{(ab-b+a-1)-(ab+b-a-1)}{b^2-1}$$

$$= \frac{ab-b+a-1-ab-b+a+1}{b^2-1}$$

$$= \frac{2a-2b}{b^2-1}$$

$$= \frac{2(a-b)}{b^2-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

आता $a < b \quad \therefore \; a - b < 0$

तसेच $b^2-1 > 0$ कारण $b > 1$

$\frac{2(a-b)}{b^2-1} < 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} < 0 \ldots (1)$ व (2) वरून

$\frac{a-1}{b-1} < \frac{a+1}{b+1}$

उदा (4) जर $a : b = 2 : 1$ आणि $b : c = 4 : 1$ तर $\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3$ या राशीची किंमत काढा.

उकल : $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$ $\quad \therefore a = 2b$ $\quad \frac{b}{c} = \frac{4}{1}$ $\quad \therefore b = 4c$

$a = 2b = 2 \times 4c = 8c \quad \therefore a = 8c$

आता $a = 8c$, $b = 4c$ या किमती घालून

$$\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = \left(\frac{(8c)^4}{32 \times 4^2 \times c^2 \times c^2}\right)^3$$

$$= \left[\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times c^4}{32 \times 16 \times c^2 \times c^2}\right]^3$$

$$= (8)^3$$

$$\therefore \left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = 512$$

सरावसंच 4.2

(1) $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ या गुणधर्माचा उपयोग करून रिकाम्या जागी योग्य संख्या लिहा.

(i) $\frac{5}{7} = \frac{....}{28} = \frac{35}{....} = \frac{....}{3.5}$ (ii) $\frac{9}{14} = \frac{4.5}{....} = \frac{....}{42} = \frac{....}{3.5}$

(2) पुढील गुणोत्तरे काढा.

(i) वर्तुळाच्या त्रिज्येचे त्याच्या परिघाशी असलेले गुणोत्तर.

(ii) r त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाच्या परिघाचे, त्याच्या क्षेत्रफळाशी असलेले गुणोत्तर.

(iii) बाजू 7 सेमी असलेल्या चौरसाच्या कर्णाचे त्याच्या बाजूशी असलेले गुणोत्तर.

(iv) लांबी 5 सेमी व रुंदी 3.5 सेमी असलेल्या आयताच्या परिमितीचे, क्षेत्रफळाशी असलेले गुणोत्तर.

(3) पुढे दिलेल्या गुणोत्तरांच्या जोड्यांमधील लहान-मोठेपणा ठरवा.

(i) $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18}, \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1}, \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) □ABCD समांतरभुज चौकोन आहे. त्याच्या $\angle A$ व $\angle B$ च्या मापांचे गुणोत्तर 5 : 4 आहे. तर $\angle B$ चे माप काढा.

(ii) अल्बर्ट आणि सलीम यांच्या आजच्या वयांचे गुणोत्तर 5 : 9 आहे. पाच वर्षांनंतर त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर 3 : 5 होईल, तर त्यांची आजची वये काढा.

(iii) एका आयताच्या लांबी व रुंदीचे गुणोत्तर 3 : 1 आहे. आयताची परिमिती 36 सेमी आहे, तर आयताची लांबी व रुंदी काढा.

(iv) दोन संख्यांचे गुणोत्तर 31 : 23 असून त्यांची बेरीज 216 आहे, तर त्या संख्या काढा.

(v) दोन संख्यांचा गुणाकार 360 आहे व त्याचे गुणोत्तर 10 : 9 आहे, तर त्या संख्या काढा.

(5*) जर $a : b = 3 : 1$ आणि $b : c = 5 : 1$ तर (i) $\left(\dfrac{a^3}{15b^2c}\right)^3$ (ii) $\dfrac{a^2}{7bc}$ या राशींच्या किमती काढा.

(6*) $\sqrt{0.04\times 0.4\times a} = 0.4\times 0.04\times\sqrt{b}$ तर $\dfrac{a}{b}$ हे गुणोत्तर काढा.

(7) $(x + 3) : (x + 11) = (x - 2) : (x + 1)$ तर x ची किंमत काढा.

जाणून घेऊया.

समान गुणोत्तरांवरील क्रिया

समानतेच्या गुणधर्मांचा उपयोग करून दोन समान गुणोत्तरांवर काही क्रिया करता येतात. त्यांचा अभ्यास करू.

जर a , b, c, d या धन संख्या असतील तर त्यांसाठी खालील गुणधर्म समजून घेऊ.

(I) व्यस्त क्रिया (Invertendo) जर $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ तर $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore\ a\times d = b\times c$$

$$\therefore\ b\times c = a\times d$$

$$\therefore\ \frac{b\times c}{a\times c} = \frac{a\times d}{a\times c}$$ (दोन्ही बाजूंस $a \times c$ ने भागून.)

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$\therefore$ जर $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ तर $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$ **या गुणधर्माला 'व्यस्त क्रिया' म्हणतात.**

(II) एकांतर क्रिया (Alternando) जर $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ तर $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore\ a\times d = b\times c$$

$$\frac{a\times d}{c\times d} = \frac{b\times c}{c\times d}$$ (दोन्ही बाजूंस $c \times d$ ने भागून)

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

जर $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ तर $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ **या गुणधर्माला 'एकांतर क्रिया' म्हणतात.**

(III) योग क्रिया (Componendo) जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \quad \text{(दोन्ही बाजूंत 1 मिळवून)}$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ **या गुणधर्माला 'योग क्रिया' म्हणतात.**

(IV) वियोग क्रिया (Dividendo) जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \quad \text{(दोन्ही बाजूंतून 1 वजा करून)}$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ **या गुणधर्माला 'वियोग क्रिया' म्हणतात.**

(V) योग वियोग क्रिया (Componendo–dividendo) जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, $a \neq b, c \neq d$

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad \text{(योग क्रिया करून)} \quad \ldots.(1)$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad \text{(वियोग क्रिया करून)} \quad \ldots.(2)$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \quad \text{(1) व (2) वरून.}$$

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ **या गुणधर्माला 'योग–वियोग क्रिया' म्हणतात.**

योग क्रिया आणि वियोग क्रिया यांचे सामान्य रूप

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (एकदा योग क्रिया)

$$\frac{a+2b}{b}=\frac{c+2d}{d} \quad \text{(दोनदा योग क्रिया करून)}$$

सामान्यपणे $\frac{a+mb}{b}=\frac{c+md}{d}$ (m वेळा योग क्रिया करून) ...(1)

तसेच जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a-mb}{b}=\frac{c-md}{d}$ (m वेळा वियोग क्रिया करून) ...(2)

आणि जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+mb}{a-mb}=\frac{c+md}{c-md}$ ...((1) व (2) वरून, भागाकार करून)

हे लक्षात ठेवूया.

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (व्यस्त क्रिया)

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (एकांतर क्रिया)

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (योग क्रिया)

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (वियोग क्रिया)

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (योग-वियोग क्रिया)

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) जर $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ तर $\frac{a+7b}{7b}$ हे गुणोत्तर काढा.

रीत I

उकल : जर $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ तर $\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=k$, एकांतर क्रिया करून

$\therefore\ a = 5k,\ b = 3k$

$$\therefore \frac{a+7b}{7b}=\frac{5k+7\times 3k}{7\times 3k}$$

$$=\frac{5k+21k}{21k}$$

$$=\frac{26k}{21k} = \frac{26}{21}$$

रीत II

$$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$$

$$\therefore \frac{a}{7b} = \frac{5}{21}$$

$$\therefore \frac{a+7b}{7b} = \frac{5+21}{21}$$ (योगक्रिया करून)

$$\therefore \frac{a+7b}{7b} = \frac{26}{21}$$

उदा. (2) जर $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$ तर $\frac{5a-b}{b}$ काढा.

रीत I

उकल : $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$

$\therefore \frac{a}{7}=\frac{b}{4}$ एकांतर क्रिया करून

$\therefore \frac{a}{7}=\frac{b}{4}=m$ मानू

$\therefore\ a = 7m,\ \ b = 4m$

$$\therefore \frac{5a-b}{b} = \frac{5(7m)-4m}{4m}$$

$$= \frac{35m-4m}{4m}$$

$$= \frac{31}{4}$$

रीत II

$$\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$$

$$\frac{5a}{b}=\frac{5\times 7}{4}$$

$$=\frac{35}{4}$$

$$\frac{5a-b}{b}=\frac{35-4}{4}$$ (वियोग क्रिया करून)

$$\frac{5a-b}{b}=\frac{31}{4}$$

उदा. (3) जर $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ तर $\frac{a+2b}{a-2b}$ ची किंमत काढा.

उकल : रीत I : समजा $a = 7m, b = 3m$

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7m+2\times 3m}{7m-2\times 3m}$$

$$= \frac{7m+6m}{7m-6m}$$

$$= \frac{13m}{m} = \frac{13}{1}$$

रीत II : $\therefore \frac{a}{b} = \frac{7}{3}$

$\therefore \frac{a}{2b} = \frac{7}{6}$ ...... दोन्ही बाजूंना $\frac{1}{2}$ ने गुणून

$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7+6}{7-6}$ (योग-वियोग क्रिया करून)

$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{13}{1}$

उदा (4) जर $\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$ तर $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ ची किंमत काढा.

उकल : **रीत I**

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ .... एकांतर क्रियेने

आता $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ च्या प्रत्येक पदास b ने भागून.

$$\frac{\frac{5a}{b}+\frac{3b}{b}}{\frac{7a}{b}-\frac{2b}{b}} = \frac{5\left(\frac{a}{b}\right)+3}{7\left(\frac{a}{b}\right)-2}$$

$$= \frac{5\left(\frac{3}{2}\right)+3}{7\left(\frac{3}{2}\right)-2}$$

$$= \frac{\frac{15}{2}+3}{\frac{21}{2}-2}$$

$$= \frac{15+6}{21-4}$$

$$= \frac{21}{17}$$

रीत II

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$$

$\therefore \frac{a}{3} = \frac{b}{2}$ = t मानू.

$\therefore$ a = 3t व b = 2t या किमती ठेवून.

$$\frac{5a+3b}{7a-2b} = \frac{5(3t)+3(2t)}{7(3t)-2(2t)} \quad (t \neq 0)$$

$$= \frac{15t+6t}{21t-4t}$$

$$= \frac{21t}{17t}$$

$$= \frac{21}{17}$$

उदा (5) जर $\dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{5}$ तर $\dfrac{4x-y}{4x+y}$ ची किमत काढा.

उकल :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{4x}{y} = \frac{16}{5} \qquad \text{...(दोन्ही बाजूंना 4 ने गुणून)}$$

$$\therefore \quad \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{16+5}{16-5} \qquad \text{...(योग-वियोग क्रिया करून)}$$

$$\therefore \quad \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{21}{11}$$

$$\therefore \quad \frac{4x-y}{4x+y} = \frac{11}{21}$$

उदा (6) जर $5x = 4y$ तर $\dfrac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2}$ ची किंमत काढा.

उकल :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \quad \frac{3x^2}{y^2} = \frac{48}{25} \qquad \text{...(दोन्ही बाजूंस 3 ने गुणून)}$$

$$\therefore \quad \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{48+25}{48-25} \qquad \text{...(योग-वियोग क्रिया करून)}$$

$$\therefore \quad \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{73}{23}$$

जाणून घेऊया.

समान गुणोत्तरांच्या गुणधर्मांचा उपयोग (Use of equal ratios)

काही समीकरणे सोडवण्यासाठी इतर पद्धतींपेक्षा समान गुणोत्तरांवरील क्रियांचा उपयोग करणे सोईचे असते.

उदा (1) समीकरण सोडवा. $\dfrac{3x^2+5x+7}{10x+14} = \dfrac{3x^2+4x+3}{8x+6}$

उकल : $\dfrac{3x^2+5x+7}{10x+14} = \dfrac{3x^2+4x+3}{8x+6}$

$$\frac{(6x^2+10x+14)}{10x+14} = \frac{(6x^2+8x+6)}{8x+6} \qquad \text{(दोन्ही बाजूंस 2 ने गुणून)}$$

$$\frac{(6x^2+10x+14)-(10x+14)}{10x+14}=\frac{(6x^2+8x+6)-(8x+6)}{8x+6}$$ (वियोग क्रिया करून)

$$\therefore \quad \frac{6x^2}{10x+14}=\frac{6x^2}{8x+6}$$

हे समीकरण $x=0$ या किमतीसाठी सत्य आहे. $\therefore$ $x=0$ ही एक उकल आहे.

जर $x\neq 0$ तर $x^2\neq 0$, $\therefore$ $6x^2$ ने भागून, $\frac{1}{10x+14}=\frac{1}{8x+6}$

$\therefore \quad 8x+6=10x+14$

$\therefore \quad 6-14=10x-8x$

$\therefore \quad -8=2x$

$\therefore \quad x=-4$

$\therefore$ $x=-4$ किंवा $x=0$ या दिलेल्या समीकरणाच्या उकली आहेत.

उदा (2) सोडवा $\frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}}=\frac{5}{1}$

$$\frac{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}=\frac{5+1}{5-1}$$ (योग-वियोग क्रिया करून)

$$\therefore \quad \frac{2\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x-2}}=\frac{6}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}}=\frac{3}{2}$$ (दोन्ही बाजूंचे वर्ग करून)

$$\therefore \quad \frac{x+7}{x-2}=\frac{9}{4}$$

$\therefore \quad 4x+28=9x-18$

$\therefore \quad 28+18=9x-4x$

$\therefore \quad 46=5x$

$$\therefore \quad \frac{46}{5}=x$$

$\therefore$ $x=\frac{46}{5}$ ही समीकरणाची उकल आहे.