कृती

जाड कागदाचे पाच तुकडे घ्या. प्रत्येक कागदावर खालीलपैकी एक एक विधान लिहा.

(i) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (ii) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (iii) $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bd}$ (iv) $\frac{c}{d}=\frac{c-a}{d-b}$ (v) $\frac{a}{b}=\frac{rc}{rd}$

a, b, c, d या धनसंख्या आहेत आणि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ही माहिती दिली आहे. वरीलपैकी प्रत्येक विधान सत्य की असत्य आहे हे कार्डाच्या मागे लिहा. विधान असत्य असल्यास त्याचे कारण लिहा.

सरावसंच 4.3

(1) जर $\frac{a}{b}=\frac{7}{3}$ तर पुढील गुणोत्तरांच्या किंमती काढा.

(i) $\frac{5a+3b}{5a-3b}$ (ii) $\frac{2a^2+3b^2}{2a^2-3b^2}$ (iii) $\frac{a^3-b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7a+9b}{7a-9b}$

(2) जर $\frac{15a^2+4b^2}{15a^2-4b^2}=\frac{47}{7}$ तर पुढील गुणोत्तरांच्या किंमती ठरवा.

(i) $\frac{a}{b}$ (ii) $\frac{7a-3b}{7a+3b}$ (iii) $\frac{b^2-2a^2}{b^2+2a^2}$ (iv) $\frac{b^3-2a^3}{b^3+2a^3}$

(3) जर $\frac{3a+7b}{3a-7b}=\frac{4}{3}$ तर $\frac{3a^2-7b^2}{3a^2+7b^2}$ या गुणोत्तराची किंमत काढा.

(4) पुढील समीकरणे सोडवा.

(i) $\frac{x^2+12x-20}{3x-5}=\frac{x^2+8x+12}{2x+3}$ (ii) $\frac{10x^2+15x+63}{5x^2-25x+12}=\frac{2x+3}{x-5}$

(iii) $\frac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x+1)^2-(2x-1)^2}=\frac{17}{8}$ (iv*) $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}}=\frac{4}{1}$

(v) $\frac{(4x+1)^2+(2x+3)^2}{4x^2+12x+9}=\frac{61}{36}$ (vi) $\frac{(3x-4)^3-(x+1)^3}{(3x-4)^3+(x+1)^3}=\frac{61}{189}$

कृती : खाली दिलेल्या मधल्या चौकटीतील a आणि b च्या किमती बदलून, म्हणजे $a : b$ चे गुणोत्तर बदलून वेगवेगळी उदाहरणे तयार करता येतील. तसे बदल करून शिक्षकांनी भरपूर सराव द्यावा.

$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$

$\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}$ = ------

$\frac{3a}{4b}$ = ------

$\frac{2a-b}{2a+b}$ = ------

$\frac{a^2+b^2}{b^2}$ = ---

$\frac{a}{2b}$ = ------

जाणून घेऊया.

समान गुणोत्तरांचा सिद्धांत (Theorem on equal ratios)

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$ या गुणधर्माला समान गुणोत्तरांचा सिद्धांत म्हणतात.

सिद्धता : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ मानू. $\therefore\ a = bk$ आणि $c = dk$

$$\therefore\ \frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

आपल्याला माहीत आहे की, $\frac{a}{b}=\frac{al}{bl}$

$$\therefore\ \text{जर } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k,\ \text{तर } \frac{al}{bl}=\frac{cm}{dm}=\frac{al+cm}{bl+dm}=k$$

याच पद्धतीने विचार करून जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots\ldots$ (सांत पदे) आणि जर l, m, n या शून्येतर संख्या असतील तर प्रत्येक गुणोत्तर = $\frac{al+cm+en+\ldots}{bl+dm+fn+\ldots}$ (सांत पदे) हे समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांताचे सामान्य रूप मिळते.

विचार करूया.

एका व्यायामशाळेत शिशुगटात 35 मुली व 42 मुलगे, बालगटात 30 मुली व 36 मुलगे आणि तरुण गटात 20 मुली व 24 मुलगे आहेत. तर प्रत्येक गटातील मुलींची संख्या आणि मुलग्यांची संख्या यांचे गुणोत्तर किती आहे ?

सांघिक कवायतीसाठी तिन्ही गट मैदानावर एकत्र केले. आता एकत्र झालेल्या समूहातील मुलींची संख्या व मुलग्यांची संख्या यांचे गुणोत्तर किती आहे ?

वरील प्रश्नांच्या उत्तरातून तुम्हांला समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांताचा पडताळा आला का ?

उदा (1) खालील विधानातील रिकाम्या जागा भरा.

(i) $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=\frac{4a+9b}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$ (ii) $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{4}=\frac{5x-3y+4z}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

उकल : (i) $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=\frac{4a+9b}{4\times3+9\times7}=\frac{4a+9b}{12+63}=\frac{4a+9b}{75}$

(ii) $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{4}=\frac{5\times x}{5\times 3}=\frac{-3\times y}{-3\times 5}=\frac{4\times z}{4\times 4}$

$$\therefore\ =\frac{5x}{15}=\frac{-3y}{-15}=\frac{4z}{16}$$

$$=\frac{5x-3y+4z}{15-15+16}$$ ----(समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांतावरून)

$$=\frac{5x-3y+4z}{16}$$

उदा (2) जर $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}$ आणि $x + y + z \neq 0$ तर

प्रत्येक गुणोत्तर = $\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$ हे दाखवा.

उकल : $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}$ = k मानू.

$\therefore$ समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांताने

$$k=\frac{a+b+c}{(x-2y+3z)+(y-2z+3x)+(z-2x+3y)}$$

$$=\frac{a+b+c}{2x+2y+2z}$$

$$=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

$$\therefore \frac{a}{x-2y+3z}=\frac{b}{y-2z+3x}=\frac{c}{z-2x+3y}=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

उदा (3) जर $\frac{y}{b+c-a}=\frac{z}{c+a-b}=\frac{x}{a+b-c}$ तर $\frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$ हे सिद्ध करा.

उकल : प्रथम दिलेल्या समान गुणोत्तरांमध्ये व्यस्त क्रिया करून

$$\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}$$

आता $\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}$ = k मानू.

$\therefore$ समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांताने

$$k=\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{z+x}$$

$$=\frac{2a}{z+x} \quad .....(I)$$

$$k=\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{x+y}$$

$$=\frac{2b}{x+y} \quad ....(II)$$

$$k=\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{y+z}$$

$$=\frac{2c}{y+z} \quad ......(III)$$

$$\therefore \frac{2a}{z+x}=\frac{2b}{x+y}=\frac{2c}{y+z}$$

$$\therefore \frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$$

उदा (4) सोडवा : $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{7x-3}{5x+2}$

उकल : उदाहरणाचे निरीक्षण केल्यावर असे दिसते की उजव्या बाजूच्या गुणोत्तरातील पूर्वपदाला व उत्तरपदाला $2x$ ने गुणले तर पहिल्या गुणोत्तरातील प्रत्येकी दोन पदे मिळतात. म्हणून दुसऱ्या गुणोत्तरातील दोन्ही पदांना $2x$ ने गुणू.परंतु त्याआधी x शून्य नाही हे निश्चित करून घेऊ.

जर $x = 0$ असेल तर $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{8}{7}$ आणि $\frac{7x-3}{5x+2}=\frac{-3}{2}$

$\therefore$ $\frac{8}{7}=\frac{-3}{2}$ हे विसंगत विधान मिळते.

$\therefore$ $x \neq 0$

$\therefore$ दुसऱ्या गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांना $2x$ ने गुणून.

$$\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{2x(7x-3)}{2x(5x+2)}=k$$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{14x^2-6x}{10x^2+4x}=k$$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8-14x^2+6x}{10x^2+4x+7-10x^2-4x}=\frac{8}{7}=k$$

$$\therefore \quad k=\frac{8}{7}$$

$$\therefore \quad \frac{7x-3}{5x+2}=\frac{8}{7}$$

$$\therefore \quad 49x-21=40x+16$$

$$\therefore \quad 49x-40x=16+21$$

$$\therefore \quad 9x=37 \qquad \therefore \quad x=\frac{37}{9}$$

सरावसंच 4.4

(1) पुढील विधानांतील रिकाम्या जागा भरा.

(i) $\frac{x}{7}=\frac{y}{3}=\frac{3x+5y}{.......}=\frac{7x-9y}{......}$ (ii) $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{7}=\frac{a-2b+3c}{......}=\frac{......}{6-8+14}$

(2) $5m-n=3m+4n$ तर पुढील राशींच्या किमती काढा. ''

(i) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ (ii) $\frac{3m+4n}{3m-4n}$

(3) (i) जर $a(y+z)=b(z+x) = c(x+y)$ आणि a, b, c पैकी कोणत्याही दोन संख्या समान नाहीत तर $\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$ हे दाखवा.

(ii) जर $\frac{x}{3x-y-z}=\frac{y}{3y-z-x}=\frac{z}{3z-x-y}$ आणि $x+y+z \neq 0$ तर प्रत्येक गुणोत्तराची किंमत 1 आहे असे दाखवा.

(iii) जर $\frac{ax+by}{x+y} = \frac{bx+az}{x+z} = \frac{ay+bz}{y+z}$ आणि $x+y+z \neq 0$ तर प्रत्येक गुणोत्तर $\frac{a+b}{2}$ आहे, हे सिद्ध करा.

(iv) जर $\frac{y+z}{a} = \frac{z+x}{b} = \frac{x+y}{c}$ तर $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c}$ हे दाखवा.

(v) जर $\frac{3x-5y}{5z+3y} = \frac{x+5z}{y-5x} = \frac{y-z}{x-z}$ तर प्रत्येक गुणोत्तर $\frac{x}{y}$ एवढे आहे हे दाखवा.

(4) सोडवा. (i) $\frac{16x^2-20x+9}{8x^2+12x+21} = \frac{4x-5}{2x+3}$ (ii) $\frac{5y^2+40y-12}{5y+10y^2-4} = \frac{y+8}{1+2y}$

जाणून घेऊया.

परंपरित प्रमाण (Continued Proportion)

पुढील गुणोत्तरे विचारात घ्या. 4:12 आणि 12:36 ही गुणोत्तरे समान आहेत. या दोन प्रमाणांतील पहिल्याचे उत्तरपद आणि दुसऱ्याचे पूर्व पद समान आहे. म्हणून 4, 12, 36 या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.

जेव्हा $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ तेव्हा a, b, c या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.

जर $ac = b^2$, तर दोन्ही बाजूंना bc ने भागून $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ हे समीकरण मिळते.

$\therefore$ $ac = b^2$ असेल, तर a, b, c परंपरित प्रमाणात असतात.

जेव्हा a, b, c परंपरित प्रमाणात असतात तेव्हा b ला a आणि c यांचा '**भूमितीय मध्य**' (Geometric mean) किंवा '**मध्यम प्रमाण पद**' (Mean proportional) म्हणतात.

यावरून लक्षात घ्या, की खालील सर्व विधाने समान अर्थाची आहेत.

$\therefore$ (1) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ (2) $b^2 = ac$ (3) a, b, c परंपरित प्रमाणात आहेत.

(4) b हा a व c यांचा भूमितीमध्य आहे. (5) b हे a व c चे मध्यम प्रमाणपद आहे.

परंपरित प्रमाणाची संकल्पनासुद्धा विस्तारित करता येते.

जर $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f}$ तर a, b, c, d, e आणि f या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत, असे म्हणतात.

उदा (1) x ही संख्या 25 व 4 यांचा भूमितीमध्य आहे तर x ची किंमत काढा.

उकल : x हा 25 व 4 यांचा भूमितीमध्य आहे.

$$\therefore x^2 = 25 \times 4$$
$$\therefore x^2 = 100$$
$$\therefore x = 10$$

उदा (2) जर $4\,a^2b$, $8\,ab^2$, p परंपरित प्रमाणात असतील तर p ची किंमत काढा.

उकल : दिलेल्या माहितीवरून $4\,a^2b$, $8\,ab^2$, p परंपरित प्रमाणात आहेत.

$$\therefore \quad \frac{4a^2b}{8ab^2} = \frac{8ab^2}{p}$$

$$p = \frac{8ab^2 \times 8ab^2}{4a^2b} = 16b^3$$

उदा (3) 7, 12 आणि 18 या प्रत्येक संख्येतून कोणती संख्या वजा केली असता येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात असतील ?

उकल : 7, 12 आणि 18 या प्रत्येक संख्येतून x ही संख्या वजा केली असता येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात येतील असे मानू.

$(7-x)$, $(12-x)$, $(18-x)$ परंपरित प्रमाणात आहेत.

$$\therefore \quad (12-x)^2 = (7-x)(18-x)$$

$$\therefore \quad 144-24x+x^2 = 126-25x+x^2$$

$$\therefore \quad -24x+25x = 126-144$$

$$\therefore \quad x = -18$$

पडताळा

$(7-x) = 7-(-18) = 25$

$(12-x) = 12-(-18) = 30$

$(18-x) = 18-(-18) = 36$

$30^2 = 900$ आणि $25 \times 36 = 900$

25, 30, 36 या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत.

$\therefore$ 7, 12, 18 मधून -18 वजा केल्यास येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात असतील.

k – पद्धती (k –method)

गुणोत्तरातील k – पद्धती ही समान गुणोत्तरांवरील म्हणजेच प्रमाणावरील काही प्रश्न सोडवण्याची एक सोपी रीत आहे. या रीतीमध्ये दिलेल्या समान गुणोत्तरांपैकी प्रत्येकाची किंमत k मानतात.

उदा (1) जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर दाखवा की $\frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$

उकल : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ मानू $\therefore$ $a = bk$, $c = dk$

a आणि c च्या किमती दोन्ही बाजूंत ठेवून.

डावी बाजू $= \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{5(bk)-3(dk)}{5b-3d} = \frac{k(5b-3d)}{(5b-3d)} = k$

उजवी बाजू $= \frac{7a-2c}{7b-2d} = \frac{7(bk)-2(dk)}{7b-2d} = \frac{k(7b-2d)}{7b-2d} = k$

$\therefore$ डावी बाजू = उजवी बाजू.

$$\therefore \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$$

उदा (2) जर a, b, c परंपरित प्रमाणात असतील, तर सिद्ध करा $\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$

उकल : a, b, c हे परंपरित प्रमाणात आहेत. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ मानू.

$\therefore b = ck, a = bk = ck \times k = ck^2$

a आणि b च्या किमती घालून

डावी बाजू $= \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(ck^2+ck)^2}{(ck^2)(ck)} = \frac{c^2k^2(k+1)^2}{c^2k^3} = \frac{(k+1)^2}{k}$

उजवी बाजू $= \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{(ck+c)^2}{(ck)c} = \frac{c^2(k+1)^2}{c^2k} = \frac{(k+1)^2}{k}$

$\therefore$ डावी बाजू = उजवी बाजू. $\therefore \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$

उदा (3) जर a, b, c परंपरित प्रमाणात असतील,

तर सिद्ध करा $\frac{a}{c} = \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

उकल : a, b, c परंपरित प्रमाणात आहेत. $\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

समजा, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \text{k}$ $\therefore b = ck$ आणि $a = ck^2$

डावी बाजू $= \frac{a}{c} = \frac{ck^2}{c} = k^2$

उजवी बाजू $= \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

$$= \frac{(k^2c)^2 + k^2c(ck) + (ck)^2}{(ck)^2 + (ck)(c) + c^2}$$

$$= \frac{k^4c^2 + k^3c^2 + c^2k^2}{c^2k^2 + c^2k + c^2}$$

$$= \frac{c^2k^2(k^2+k+1)}{c^2(k^2+k+1)}$$

$$= k^2$$

$\therefore$ डावी बाजू = उजवी बाजू

$$\therefore \frac{a}{c} = \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$$

उदा (4) पाच संख्या परंपरित प्रमाणात असून पहिले पद 5 व शेवटचे पद 80 आहे. तर त्या संख्या काढा.

उकल : समजा, परंपरित प्रमाण असलेल्या पाच संख्या a, ak, ak^2, ak^3, ak^4 आहेत.

येथे $a = 5$ आणि $ak^4 = 80$

$\therefore 5 \times k^4 = 80$

$\therefore k^4 = 16$

$\therefore k = 2 \quad \because 2^4 = 16$

$ak = 5 \times 2 = 10 \qquad ak^2 = 5 \times 4 = 20$

$ak^3 = 5 \times 8 = 40 \qquad ak^4 = 5 \times 16 = 80$

$\therefore$ त्या संख्या 5, 10, 20, 40, 80 आहेत.

सरावसंच 4.5

(1) 12, 16 आणि 21 या प्रत्येक संख्येत कोणती संख्या मिळवली असता येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात असतील ?

(2) $(23-x)$ व $(19-x)$ यांचे $(28-x)$ हे मध्यम प्रमाणपद आहे, तर x ची किंमत काढा.

(3) तीन संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत. त्यांचे मध्यम प्रमाणपद 12 असून उरलेल्या दोन संख्यांची बेरीज 26 आहे, तर त्या संख्या काढा.

(4) जर $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$ तर a, b, c या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत हे दाखवा.

(5) जर $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ आणि $a, b, c > 0$ तर सिद्ध करा की,

(i) $(a+b+c)(b-c) = ab - c^2$

(ii) $(a^2+b^2)(b^2+c^2) = (ab+bc)^2$

(iii) $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a+c}{b}$

(6) $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$ यांतील मध्यम प्रमाणपद काढा.

कृती : भूगोलाच्या पुस्तकातील भारताचा राजकीय नकाशा पाहा. त्यात दिलेले अंतराचे प्रमाण लक्षात घ्या. त्यावरून वेगवेगळ्या शहरांतील सरळ रेषेतील अंतरे काढा.

जसे, (i) नवी दिल्ली ते बंगळुरू (ii) मुंबई ते कोलकता (iii) जयपूर ते भुवनेश्वर

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

(1) खालील प्रश्नांसाठी बहुपर्यायी उत्तरांतील अचूक पर्याय निवडा.

(i) जर 6 : 5 = y : 20 तर y ची किंमत खालीलपैकी कोणती ?

(A) 15 (B) 24 (C) 18 (D) 22.5

(ii) 1 मिलिमीटरचे 1 सेंटिमीटरशी असलेले गुणोत्तर खालीलपैकी कोणते ?

(A) 1 : 100 (B) 10 : 1 (C) 1 : 10 (D) 100 : 1

(iii*) जतीन, नितीन व मोहसीन यांची वये अनुक्रमे 16, 24 व 36 वर्षे आहेत, तर नितीनच्या वयाचे मोहसीनच्या वयाशी असलेले गुणोत्तर कोणते ?

(A) 3 : 2 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

(iv) शुभम व अनिल यांना 3 : 5 या प्रमाणात 24 केळी वाटली, तर शुभमला मिळालेली केळी किती?

(A) 8 (B) 15 (C) 12 (D) 9

(v) 4 व 25 यांचे मध्यम प्रमाणपद खालीलपैकी कोणते?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

(2) खाली दिलेल्या संख्यांच्या जोड्यांमधील पहिल्या संख्येचे दुसऱ्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) 21, 48 (ii) 36, 90 (iii) 65, 117 (iv) 138, 161 (v) 114, 133

(3) पुढील गुणोत्तरे संक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) वर्तुळाची त्रिज्या व व्यास यांचे गुणोत्तर.

(ii) आयताची लांबी 4 सेमी व रुंदी 3 सेमी असल्यास आयताच्या कर्णाचे लांबीशी असलेले गुणोत्तर.

(iii) चौरसाची बाजू 4 सेमी असल्यास चौरसाच्या परिमितीचे त्याच्या क्षेत्रफळाशी असलेले गुणोत्तर.

(4) पुढील संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत का ते ठरवा.

(i) 2, 4, 8 (ii) 1, 2, 3 (iii) 9, 12, 16 (iv) 3, 5, 8

(5) a, b, c या तीन संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत. जर $a = 3$ आणि $c = 27$ असेल तर $b =$ किती ?

(6) पुढील गुणोत्तरांचे शतमान रूपांतर करा.

(i) 37 : 500 (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{22}{30}$ (iv) $\frac{5}{16}$ (v) $\frac{144}{1200}$

(7) पहिल्या राशीचे दुसऱ्या राशीशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) 1024 MB, 1.2 GB [(1024 MB = 1 GB)]

(ii) 17 रुपये, 25 रुपये 60 पैसे (iii) 5 डझन, 120 नग

(iv) 4 चौमी, 800 चौसेमी (v) 1.5 किग्रॅ, 2500 ग्रॅम

(8) जर $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ तर पुढील राशींच्या किमती काढा.

(i) $\frac{4a+3b}{3b}$ (ii) $\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}$

(iii) $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7b-4a}{7b+4a}$

(9) a, b, c, d प्रमाणात असतील, तर सिद्ध करा.

(i) $\frac{11a^2+9ac}{11b^2+9bd}=\frac{a^2+3ac}{b^2+3bd}$

(ii*) $\sqrt{\frac{a^2+5c^2}{b^2+5d^2}} = \frac{a}{b}$

(iii) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

(10) a, b, c परंपरित प्रमाणात असतील, तर सिद्ध करा.

(i) $\dfrac{a}{a+2b} = \dfrac{a-2b}{a-4c}$ (ii) $\dfrac{b}{b+c} = \dfrac{a-b}{a-c}$

(11) सोडवा : $\dfrac{12x^2+18x+42}{18x^2+12x+58} = \dfrac{2x+3}{3x+2}$

(12) जर $\dfrac{2x-3y}{3z+y} = \dfrac{z-y}{z-x} = \dfrac{x+3z}{2y-3x}$ तर प्रत्येक गुणोत्तर $\dfrac{x}{y}$ आहे, हे सिद्ध करा.

(13*) जर $\dfrac{by+cz}{b^2+c^2} = \dfrac{cz+ax}{c^2+a^2} = \dfrac{ax+by}{a^2+b^2}$ तर $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ हे सिद्ध करा.

5 दोन चलांतील रेषीय समीकरणे

3R6GCU

चला, शिकूया.

- दोन चलांतील रेषीय समीकरणे
- एकसामायिक समीकरणे
- एकसामयिक समीकरणे सोडविणे
- एकसामायिक समीकरणांवरील शाब्दिक उदाहरणे

जरा आठवूया.

उदा. खालील समीकरणे सोडवा.

(1) $m+3=5$ $m = \square$

(2) $3y+8=22$ $y = \square$

(3) $\frac{x}{3}=2$ $x = \square$

(4) $2p = p+\frac{4}{9}$ $p = \square$

(5) कोणत्या संख्येत 5 मिळवल्यास 14 ही संख्या मिळेल ?

$\square + 5 = 14$

$x + 5 = 14$

$x = \square$

(6) 8 मधून किती वजा केल्यास 2 उरतील ?

$8 - \square = 2$

$8 - y = 2$

$y = \square$

वरील प्रत्येक समीकरणात चलाचा घातांक 1 आहे. या समीकरणांना एका चलातील रेषीय समीकरणे म्हणतात.

जाणून घेऊया.

दोन चलांतील रेषीय समीकरणे (Linear equations in two variables)

ज्या दोन संख्यांची बेरीज 14 आहे, अशा संख्या शोधा.

संख्यांसाठी x व y ही चले वापरून हे उदाहरण समीकरण रूपात $x + y = 14$ असे होईल.

हे दोन चलांतील समीकरण आहे. येथे x आणि y या दोन्ही चलांच्या अनेक किमती शोधता येतात.

जसे, $9 + 5 = 14$ $7 + 7 = 14$ $8 + 6 = 14$ $4 + 10 = 14$

$(-1) + 15 = 14$ $15 + (-1) = 14$ $2.6 + 11.4 = 14$ $0 + 14 = 14$

$100 + (-86) = 14$ $(-100) + (114) = 14$ $\square + \square = 14$ $\square + \square = 14$

म्हणजे वरील समीकरणांच्या $(x = 9, y = 5)$ $(x = 7, y = 7)$ $(x = 8, y = 6)$ इत्यादी अनेक उकली मिळतात.

$x = 9$, $y = 5$ ही उकल (9, 5) अशा क्रमाने कंसात लिहिण्याचा संकेत आहे. या जोडीतील पहिली संख्या x ची किंमत व दुसरी संख्या y ची किंमत असते. $x + y = 14$ हे समीकरण सत्य ठरवणाऱ्या (9,5), (7,7), (8,6), (4,10), (10,4), (−1,15), (2.6, 11.4), ... अशा अनंत क्रमित जोड्या म्हणजे अनंत उकली आहेत.

आता दुसरे उदाहरण पाहा.

अशा दोन संख्या शोधा की ज्यांची वजाबाकी 2 आहे.

मोठी संख्या x व लहान संख्या y मानल्यास $x-y = 2$ हे समीकरण मिळेल.

x आणि y किंमतींसाठी पुढीलप्रमाणे अनेक समीकरणे मिळतील.

$10 - 8 = 2$ $\quad 9 - 7 = 2$ $\quad 8 - 6 = 2$ $\quad (-3) - (-5) = 2$ $\quad 5.3-3.3=2$

$15 - 13 = 2$ $\quad 100 - 98 = 2$ $\quad \square - \square = 2$ $\quad \square - \square = 2$

येथे $x = 10$ आणि $y = 8$ या किंमती घेतल्या तर (10,8) ही क्रमित जोडी या समीकरणाचे समाधान करते म्हणजे ही जोडी या समीकरणाची उकल आहे. (10, 8) ही जोडी (8, 10) अशी लिहून चालणार नाही. कारण (8, 10) याचा अर्थ $x = 8$, $y = 10$ असा आहे. या किमतींनी $x-y = 2$ या समीकरणाचे समाधान होत नाही. यावरून जोडीतील संख्यांचा क्रम महत्त्वाचा असतो, हे नीट लक्षात घ्या.

आता $x-y = 2$ या समीकरणाच्या उकली क्रमित जोड्यांच्या रूपात लिहू.

(7, 5), (−2, −4), (0, −2), (5.2, 3.2), (8, 6) इत्यादी अनंत उकली आहेत.

$4m - 3n = 2$ या समीकरणाच्या उकली काढा.

तुम्हीही अशी तीन वेगवेगळी समीकरणे तयार करा व त्यांच्या उकली शोधा.

आता पहिली दोन समीकरणे पाहा.

$x + y = 14$ I

$x - y = 2$ II

समीकरण I च्या उकली (9, 5), (7, 7), (8, 6)...

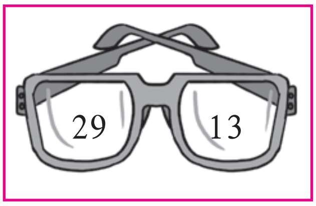
समीकरण II च्या उकली (7, 5), (−2, −4), (0, −2), (5.2, 3.2), (8, 6)...

(8, 6) ही जोडी उकलींच्या दोन्ही समूहांत सामाईक आहे. ही जोडी दोन्ही समीकरणांचे समाधान करते. म्हणून ती दोन्ही समीकरणांची सामाईक उकल आहे.

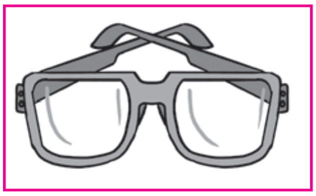
हे लक्षात ठेवूया.

जेव्हा दोन चलांतील दोन रेषीय समीकरणांचा एकाच वेळी विचार करतो तेव्हा त्या समीकरणांना **एकसामयिक समीकरणे** (Simultaneous equations) म्हणतात.

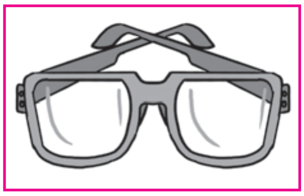
कृती : खाली दिलेल्या चश्म्यांच्या काचांवर अशा संख्या लिहा की,



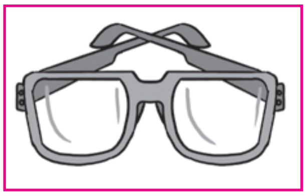
(i) ज्यांची बेरीज 42 आणि वजाबाकी 16 आहे.



(ii) ज्यांची बेरीज 37 आणि वजाबाकी 11 आहे.



(iii) ज्यांची बेरीज 54 आणि वजाबाकी 20 आहे.



(iv) ज्यांची बेरीज.. आहे आणि वजाबाकी.. आहे.

विचार करूया.

$x+y = 5$ आणि $2x + 2y = 10$ ही दोन चलांतील दोन समीकरणे आहेत.

$x+y = 5$ या समीकरणाच्या वेगवेगळ्या पाच उकली शोधा. त्याच उकलींनी $2x + 2y = 10$ या समीकरणाचेही समाधान होते का हे तपासा.

या दोन्ही समीकरणांचे निरीक्षण करा.

दोन चलांतील दोन समीकरणांच्या सर्व उकली समान असणे यासाठी आवश्यक असणारी अट मिळते का ते पाहा.

जाणून घेऊया.

चलाचा लोप करून एकसामायिक समीकरण सोडवण्याची पद्धत (Elimination method)

$x + y = 14$ आणि $x - y = 2$ हे एकसामायिक समीकरण चलांना किंमती देऊन आपण सोडवले. परंतु प्रत्येक वेळी ही रीत सोईची होईल असे नाही. उदाहरणार्थ, $2x + 3y = -4$ आणि $x - 5y = 11$ हे समीकरण x व y यांना वेगवेगळ्या किमती देऊन सोडवण्याचा प्रयत्न करून पाहा. या रीतीने उकल मिळवणे सोपे नाही हे तुमच्या लक्षात येईल.

म्हणून एकसामायिक समीकरण सोडवण्यासाठी वेगळी पद्धत वापरली जाते. या पद्धतीत दोनपैकी एका चलाचा लोप करून एका चलातील रेषीय समीकरण मिळवतात. त्यावरून त्या चलाची किंमत काढतात. ही किंमत दिलेल्यापैकी कोणत्याही समीकरणात मांडली की दुसऱ्या चलाची किंमत मिळते.

ही पद्धत समजण्यासाठी पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा (1) सोडवा : $x + y = 14$ आणि $x - y = 2$.

उकल : दोन्ही समीकरणांची बेरीज करून एका चलातील समीकरण मिळवू.

$$\begin{array}{rrcll} & x + y & = & 14 & \quad \ldots\ldots\ldots \mathrm{I} \\ + & x - y & = & 2 & \quad \ldots\ldots\ldots \mathrm{II} \\ \hline & 2x + 0 & = & 16 & \\ & 2x & = & 16 & \\ & x & = & 8 & \end{array}$$

$x = 8$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$$x + y = 14$$
$$\therefore\ 8 + y = 14$$
$$\therefore\ y = 6$$

येथे (8, 6) ही पहिल्या समीकरणाची उकल आहे. हीच उकल दुसऱ्या समीकरणाचीही आहे याचा पडताळा घेऊ.

$x - y = 8 - 6 = 2$ हे सत्य आहे.

(8,6) ही दिलेल्या दोन्ही समीकरणांची सामाईक उकल आहे.

म्हणजेच $x + y = 14$ आणि $x - y = 2$ या एकसामयिक समीकरणांची (8, 6) ही उकल आहे.

उदा (2) आई व मुलगा यांच्या वयांची बेरीज 45 आहे. आईच्या वयाच्या दुपटीतून मुलाचे वय वजा केले तर वजाबाकी 54 येते, तर त्या दोघांची वये काढा.

दिलेली माहिती चलाचा उपयोग करून लिहिली की, उदाहरण सोडवणे सोपे जाते.

उकल : आईचे आजचे वय x वर्षे व मुलाचे आजचे वय y वर्षे मानू.

पहिल्या अटीनुसार $x + y = 45$ ………I

दुसऱ्या अटीनुसार $2x - y = 54$ ………II

समीकरण (I) व (II) यांची बेरीज करून

$$\begin{aligned} 3x + 0 &= 99 \\ 3x &= 99 \\ x &= 33 \end{aligned}$$

$x = 33$ ही किंमत पहिल्या समीकरणात घालू

$$\begin{aligned} 33 + y &= 45 \\ y &= 45 - 33 \\ y &= 12 \end{aligned}$$

$x = 33$ व $y = 12$ ही उकल दुसऱ्या समीकरणाचे समाधान करते. याचा पडताळा घ्या.

आईचे आजचे वय 33 वर्षे व मुलाचे वय 12 वर्षे आहे.

दोन चलांतील रेषीय समीकरणांचे सामान्यरूप

$ax + by + c = 0$ या समीकरणात a, b, c या वास्तव संख्या असतील आणि a व b एकाच वेळी 0 नसतील तर हे समीकरण दोन चलांतील रेषीय समीकरणाचे सामान्य रूप असते.

या समीकरणात दोन्ही चलांचा घातांक 1 आहे. हे समीकरण रेषीय आहे.

उदा (1) खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा

$$3x + y = 5 \text{ ....} \quad \text{(I)}$$
$$2x + 3y = 1 \text{ ....} \text{(II)}$$

येथे एका चलाचा लोप करण्यासाठी दोन्ही समीकरणांतील एकाही चलाचा सहगुणक समान किंवा विरुद्ध संख्या नाही. तो समान करून घेऊ.

समीकरण I च्या दोन्ही बाजूंना 3 ने गुणू.

$$\therefore \quad 3x \times 3 + 3 \times y = 5 \times 3$$
$$\therefore \quad 9x + 3y = 15 \quad \text{.......(III)}$$
$$2x + 3y = 1 \quad \text{.......(II)}$$

आता समीकरण II हे समीकरण III मधून वजा करू

$$\begin{array}{r} 9x + 3y = 15 \\ \underset{-}{+}\,2x\ \underset{-}{+}\,3y\ \underset{-}{=}\ 1 \\ \hline 7x = 14 \\ x = 2 \end{array}$$

$x = 2$ ही किंमत कोणत्याही समीकरणात ठेवू.

$$2x + 3y = 1$$
$$\therefore \quad 2 \times 2 + 3y = 1$$
$$\therefore \quad 4 + 3y = 1$$
$$\therefore \quad 3y = -3$$
$$\therefore \quad y = -1$$

येथे $(2, -1)$ ही उकल दुसऱ्या समीकरणासाठीही सत्य आहे, हे पडताळा.

उदा (2) खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

$$3x - 4y - 15 = 0 \text{ ....} \quad \text{(I)}$$
$$y + x + 2 = 0 \text{ ....(II)}$$

दोन्ही समीकरणे स्थिरांक उजवीकडे घेऊन लिहू.

$$3x - 4y = 15 \text{ ....(I)}$$
$$x + y = -2 \text{ ....} \quad \text{(II)}$$

y चलाचा लोप करण्यासाठी समीकरण II ला 4 ने गुणू व समीकरण I मध्ये ते मिळवू.

$$\begin{array}{rrl} & 3x - 4y & = 15 \\ + & 4x + 4y & = -8 \\ & 7x & = 7 \\ & x & = 1 \\ \hline \end{array}$$

$x = 1$ ही किंमत समीकरण II मध्ये ठेवू.

$$x + y = -2$$
$$\therefore 1 + y = -2$$
$$\therefore y = -2 - 1$$
$$\therefore y = -3$$

$(1, -3)$ ही उकल आहे. ही उकल समीकरण I साठी सुद्धा सत्य आहे, हे पडताळा.

विचार करूया.

$3x - 4y - 15 = 0$ आणि $y + x + 2 = 0$ हीच समीकरणे x या चलाचा लोप करून सोडवता येतील का? त्याची उकल तीच येईल का?