



चला, शिकूया.

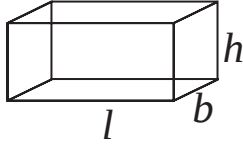
- शंकूचे पृष्ठफल
- गोलाचे पृष्ठफल
- शंकूचे घनफल
- गोलाचे घनफल



जरा आठवूया.

आपण मागील इयत्तेत इष्टिकाचिती, घन, वृत्तचिती या घनाकृतींचे पृष्ठफल व घनफल कसे काढतात हे अभ्यासले आहे.

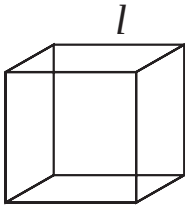
इष्टिकाचिती



आकृती 9.1

- इष्टिकाचितीची लांबी, रुंदी व उंची अनुक्रमे l , b , h असेल तर,
 - (i) इष्टिकाचितीच्या उभ्या पृष्ठांचे क्षेत्रफल $= 2(l + b) \times h$
येथे इष्टिकाचितीच्या उभ्या 4 पृष्ठांचे क्षेत्रफल विचारात घेतले आहे.
 - (ii) इष्टिकाचितीचे एकूण पृष्ठफल $= 2(lb + bh + lh)$
येथे इष्टिकाचितीच्या सहा पृष्ठांचे क्षेत्रफल विचारात घेतले आहे.
 - (iii) इष्टिकाचितीचे घनफल $= l \times b \times h$

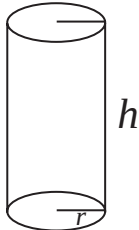
घन



आकृती 9.2

- घनाची कड (edge) l असल्यास
 - (i) घनाचे एकूण पृष्ठफल $= 6l^2$
 - (ii) घनाचे उभे पृष्ठफल $= 4l^2$
 - (iii) घनाचे घनफल $= l^3$

वृत्तचिती



आकृती 9.3

- वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या r व उंची h असल्यास
 - (i) वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफल $= 2\pi rh$
 - (ii) वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफल $= 2\pi r(r + h)$
 - (iii) वृत्तचितीचे घनफल $= \pi r^2 h$

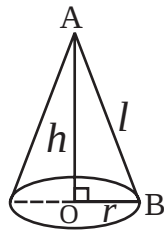
सरावसंच 9.1

- एका इष्टिकाचिती आकाराच्या औषधाच्या खोक्याची लांबी, रुंदी व उंची अनुक्रमे 20 सेमी, 12 सेमी व 10 सेमी आहे तर या खोक्याच्या उभ्या पृष्ठांचे क्षेत्रफळ व एकूण पृष्ठफळ काढा.
- एका इष्टिकाचिती आकाराच्या खोक्याचे एकूण पृष्ठफळ 500 चौ एकक आहे. तिची रुंदी व उंची अनुक्रमे 6 व 5 एकक आहे, तर त्या खोक्याची लांबी किती असेल ?
- एका घनाकृतीची बाजू 4.5 सेमी आहे, या घनाकृतीच्या उभ्या पृष्ठांचे क्षेत्रफळ व एकूण पृष्ठफळ काढा.
- एका घनाचे एकूण पृष्ठफळ 5400 चौसेमी आहे तर त्या घनाच्या उभ्या पृष्ठांचे क्षेत्रफळ काढा.
- एका इष्टिकाचितीचे घनफळ 34.50 घन मी असून तिची रुंदी व उंची अनुक्रमे 1.5 मी व 1.15 मी आहे तर त्या इष्टिकाचितीची लांबी काढा.
- 7.5 सेमी कडा असलेल्या घनाचे घनफळ किती ?
- एका वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या 20 सेमी व उंची 13 सेमी आहे तर त्या वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ व एकूण पृष्ठफळ काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)
- वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ 1980 सेमी^2 असून तळाची त्रिज्या 15 सेमी असल्यास त्या वृत्तचितीची उंची काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)



जाणून घेऊया.

शंकूशी संबंधित संज्ञा व त्यांचा परस्पर संबंध (Terms related with a cone and their relation)



आकृती 9.4

सोबतची 9.4 ही आकृती शंकूची आहे. शंकूच्या तळाचा केंद्रबिंदू O आणि शंकूचा शिरोबिंदू A आहे. रेख OA हा त्रिज्या OB ला लंब आहे. म्हणजे AO ही शंकूची लंबउंची (h) आहे. AB ही शंकूची तिरकस उंची (l) आहे.

ΔAOB काटकोन त्रिकोण आहे.

$\therefore$ पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$\therefore l^2 = h^2 + r^2$$

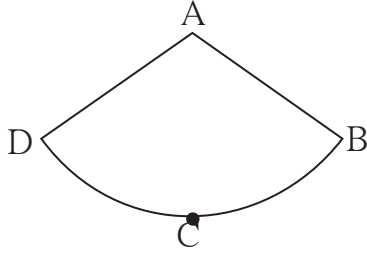
म्हणजेच, (तिरकस उंची) 2 = (लंब उंची) 2 + (तळाची त्रिज्या) 2

शंकूचे पृष्ठफळ (Surface area of a cone)

शंकूला दोन पृष्ठे असतात. (i) वर्तुळाकार तळ (ii) वक्रपृष्ठ
यांपैकी वर्तुळाच्या क्षेत्रफळाच्या सूत्रावरून शंकूच्या तळाचे क्षेत्रफळ काढता येईल.
शंकूच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ काढण्याचे सूत्र कसे काढता येईल ?



त्यासाठी शंकूच्या वक्रपृष्ठाची घडण पाहू.



आकृती 9.5

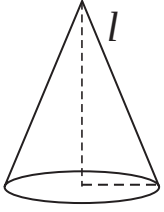
आकृती 9.4 मधील शंकू त्याच्या AB या तिरकस उंचीवर कापून उलगडला, की त्याची घडण सोबतच्या आकृती 9.5 प्रमाणे मिळते. या आकृतीला वर्तुळपाकळी असे नाव आहे.

आकृती 9.4 आणि आकृती 9.5 यांची तुलना करा. त्यावरून पुढील बाबी तुमच्या लक्षात आल्या का ?

- (i) वर्तुळपाकळीची त्रिज्या AB ही शंकूच्या तिरकस उंचीएवढी आहे.
- (ii) वर्तुळपाकळीचा कंस BCD हे शंकूच्या तळाच्या परिघाचेच रूपांतर आहे.
- (iii) शंकूच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ = A-BCD या वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ

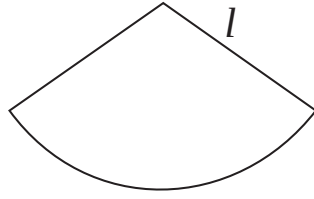
यावरून, शंकूच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी त्याच्या घडणीचे, म्हणजेच वर्तुळपाकळीचे क्षेत्रफळ काढावे लागेल. हे क्षेत्रफळ कसे काढता येते, हे पुढील कृतीतून समजून घ्या.

कृती शंकूच्या घडणीचा विचार करू.



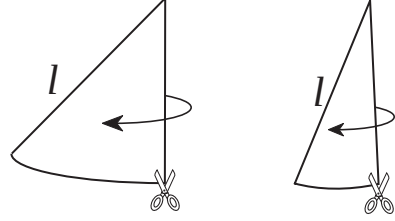
शंकू

आकृती 9.6



वक्रपृष्ठाची घडण

आकृती 9.7



घडणीचे तुकडे

आकृती 9.8

$$\text{तळाचा परीघ} = 2\pi r$$

एका वक्रपृष्ठाचे आकृती 9.8 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे शक्य तेवढे लहान तुकडे करा. ते आकृती 9.9 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे एकमेकांना जोडा.

शंकूच्या वक्रपृष्ठाचे तुकडे अशा प्रकारे जोडल्यामुळे □ABCD हा जवळपास आयत झाला आहे.

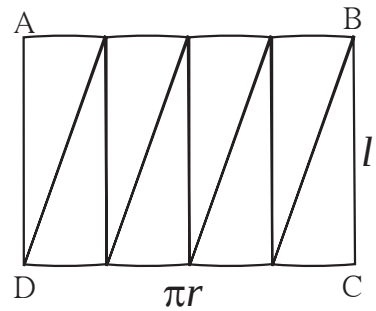
AB व CD ची एकूण लांबी ही $2\pi r$ आहे.

∴ ABCD ह्या आयताच्या AB बाजूची लांबी πr आणि CD बाजूची लांबी πr आहे.

आयताच्या BC या बाजूची लांबी = शंकूची तिरकस उंची = l आहे.

∴ शंकूचे वक्रपृष्ठफळ म्हणजेच या आयताचे क्षेत्रफळ होईल.

∴ शंकूच्या वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ = आयताचे क्षेत्रफळ = $AB \times BC = \pi r \times l = \pi r l$



आकृती 9.9

आता, शंकूच्या एकूण पृष्ठफळाचे सूत्रही काढता येईल.

शंकूचे एकूण पृष्ठफळ = वक्रपृष्ठाचे क्षेत्रफळ + तळाचे क्षेत्रफळ

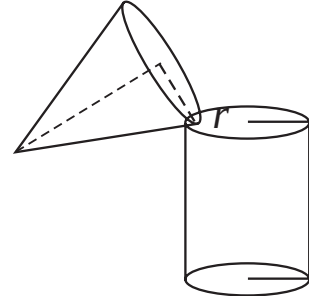
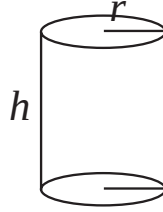
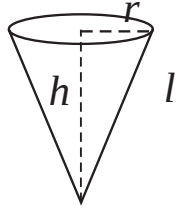
$$= \pi r l + \pi r^2$$

$$= \pi r(l + r)$$

येथे एक महत्त्वाची बाब लक्षात आली का ? शंकू बंदिस्त नसेल (म्हणजे विदूषकाच्या/ वाढदिवसाच्या टोपी सारखा असेल) तर वक्रपृष्ठ हे त्याचे एकच पृष्ठ असेल. म्हणजे त्याचे पृष्ठफळ $\pi r l$ या सूत्राने मिळेल.

कृती : एक कार्डबोर्ड घ्या. त्याच्यापासून एक बंद वृत्तचिती तयार करा म्हणजेच तळाची त्रिज्या व उंची समान असलेला एक शंकू व एका बाजूने बंद अशी वृत्तचिती तयार करा, म्हणजेच शंकूची लंबउंची व वृत्तचितीची उंची समान होईल असा एक शंकू व वृत्तचिती घ्या.

शंकू बारीक वाळूने पूर्ण भरून घ्या व ती वाळू त्या वृत्तचितीमध्ये ओता. वृत्तचिती पूर्ण भरेपर्यंत ही कृती करा. वृत्तचिती वाळूने पूर्ण भरण्यासाठी किती शंकू भरून वाळू लागली ? मोजा.



आकृती 9.10

वृत्तचिती भरण्यासाठी वाळूने भरलेले असे तीन शंकू लागले.



जाणून घेऊया.

शंकूचे घनफळ (Volume of a cone)

$3 \times$ शंकूचे घनफळ = वृत्तचितीचे घनफळ

$$\therefore 3 \times \text{शंकूचे घनफळ} = \pi r^2 h$$

$$\therefore \text{शंकूचे घनफळ} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$$



हे लक्षात ठेवूया.

(i) शंकूच्या तळाचे क्षेत्रफळ = πr^2

(ii) शंकूचे वक्रपृष्ठफळ = $\pi r l$

(iii) शंकूचे एकूण पृष्ठफळ = $\pi r(l + r)$

(iv) शंकूचे घनफळ = $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) शंकूच्या तळाची दिलेली त्रिज्या (r) व दिलेली लंब उंची (h) घेऊन त्याची तिरकस (l) उंची काढा.

(i) $r = 6$ सेमी, $h = 8$ सेमी

$$l^2 = r^2 + h^2$$

$$\therefore l^2 = (6)^2 + (8)^2$$

$$\therefore l^2 = 36 + 64$$

$$\therefore l^2 = 100$$

$$\therefore l = 10 \text{ सेमी}$$

(ii) $r = 9$ सेमी, $h = 12$ सेमी

$$l^2 = r^2 + h^2$$

$$\therefore l^2 = (9)^2 + (12)^2$$

$$\therefore l^2 = 81 + 144$$

$$\therefore l^2 = 225$$

$$\therefore l = 15 \text{ सेमी}$$

उदा (2) एका शंकूच्या तळाची त्रिज्या 12 सेमी व लंब उंची 16 सेमी असल्यास शंकूची तिरकस उंची, वक्रपृष्ठफळ व एकूण पृष्ठफळ काढा. ($\pi = 3.14$)

(i) $r = 12$ सेमी, $h = 16$ सेमी

$$l^2 = r^2 + h^2$$

$$\therefore l^2 = (12)^2 + (16)^2$$

$$\therefore l^2 = 144 + 256$$

$$\therefore l^2 = 400$$

$$\therefore l = 20 \text{ सेमी}$$

(ii) शंकूचे वक्रपृष्ठफळ $= \pi r l$

$$= 3.14 \times 12 \times 20$$

$$= 753.6 \text{ चौसेमी}$$

(iii) शंकूचे एकूण पृष्ठफळ $= \pi r(l + r)$

$$= 3.14 \times 12(20+12)$$

$$= 3.14 \times 12 \times 32$$

$$= 1205.76 \text{ चौसेमी}$$

उदा (3) एका शंकूचे एकूण पृष्ठफळ 704 चौसेमी व तळाची त्रिज्या 7 सेमी असल्यास शंकूची तिरकस उंची काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)

$$\text{शंकूचे एकूण पृष्ठफळ} = \pi r(l + r)$$

$$\therefore 704 = \frac{22}{7} \times 7 (l + 7)$$

$$\therefore \frac{704}{22} = l + 7$$

$$\therefore 32 = l + 7$$

$$\therefore 32 - 7 = l$$

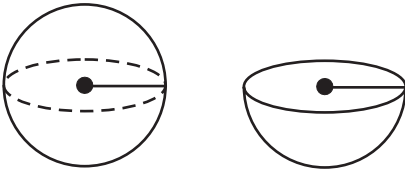
$$\therefore l = 25 \text{ सेमी}$$

10*. एका शेतामध्ये गुरांसाठी कोरडा चारा शंक्वाकार रास करून ठेवला असून, राशीची उंची 2.1 मी आहे. तळाचा व्यास 7.2 मीटर आहे, तर चान्याच्या राशीचे घनफळ काढा. पावसाची लक्षणे दिसली तर अशा प्रसंगी हा ढिग प्लॅस्टिकने आच्छादित करायचा असल्यास शेतकऱ्याला किती चौ.मीटर प्लॅस्टिकचा कागद लागेल ? ($\pi = \frac{22}{7}$ व $\sqrt{17.37} = 4.17$ घ्या.)



જાણૂન ઘેઝૂયા.

गोलाचे पृष्ठफळ (Surface area of sphere)



आकृती 9.11

पोकळ गोलाचे वक्रपृष्ठफळ = $4\pi r^2$

$\therefore$ अर्धगोलाचे वक्रपृष्ठफळ $= 2\pi r^2$

$$\begin{aligned}\text{भरीव अर्धगोलाचे एकूण पृष्ठफळ} &= \text{वक्रपृष्ठफळ} + \text{वर्तुळाचे क्षेत्रफळ} \\ &= 2\pi r^2 + \pi r^2 \\ &= 3\pi r^2\end{aligned}$$

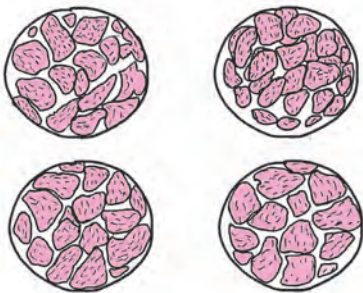
कृती :



एक मोसंबे घेऊन त्याचे दोन अर्धे भाग करा.



एक भाग कागदावर पालथा ठेवून, भोवती पेन्सिल फिरवून वर्तुळ काढा. अशी एकूण चार वर्तुळे काढा. आता मोसंब्याच्या चार समान फोडी करा.



प्रत्येक फोडीच्या सालीचे लहान लहान तुकडे करा.
एक वर्तुळ त्या तुकड्यांनी जवळपास भरता येते हे अनुभवा. चारही वर्तुळे पूर्ण भरतील. यावरून,
गोलाचे वक्रपृष्ठफळ = $4 \times$ वर्तुळाचे क्षेत्रफळ
$$= 4 \pi r^2$$

सोडवलेली उदाहरणे

- (1) एका गोलाची त्रिज्या 7 सेमी आहे, तर त्या गोलाचे वक्रपृष्ठफळ काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)

$$\begin{aligned}\text{गोलाचे वक्रपृष्ठफळ} &= 4\pi r^2 \\ &= 4 \times \frac{22}{7} \times (7)^2 \\ &= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \\ &= 88 \times 7 \\ &= 616\end{aligned}$$

गोलाचे वक्रपृष्ठफळ = 616 चौसेमी.

- (2) वक्रपृष्ठफळ 1256 चौसेमी असणाऱ्या गोलाची त्रिज्या काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)
गोलाचे वक्रपृष्ठफळ = $4\pi r^2$

$$\therefore 1256 = 4 \times 3.14 \times r^2$$

$$\therefore = \frac{1256}{4 \times 3.14} = r^2$$

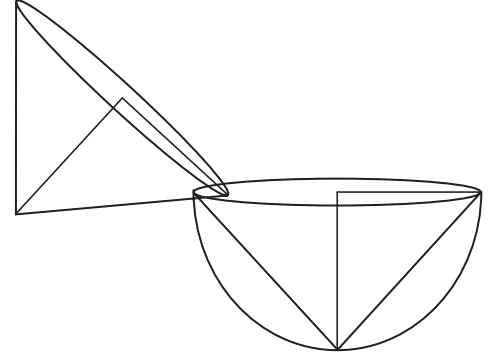
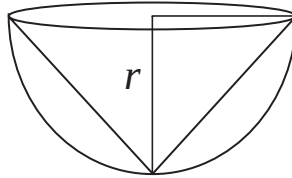
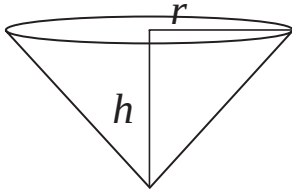
$$\therefore = \frac{31400}{314} = r^2$$

$$\therefore 100 = r^2$$

$$\therefore 10 = r$$

$$\therefore r = 10 \text{ सेमी}$$

कृती : एक शंकू व एक अर्धगोल असे घ्या की, अर्धगोलाची त्रिज्या व शंकूची उंची समान असेल, तसेच शंकूची तळाची त्रिज्या व अर्धगोलाची त्रिज्या समान असावी.
शंकू वाळूने पूर्ण भरा. पूर्ण भरलेला शंकू अर्धगोलात ओता. अर्धगोल पूर्ण भरण्यासाठी किती शंकू लागतात ते पाहा.



आकृती 9.12

एक अर्धगोल भरण्यासाठी दोन शंकू भरून वाळू लागली.

$$\therefore 2 \times \text{शंकूचे घनफळ} = \text{अर्धगोलाचे घनफळ}$$

$$\therefore \text{अर्धगोलाचे घनफळ} = 2 \times \text{शंकूचे घनफळ}$$

$$\begin{aligned}&= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 h \\ &= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times r \\ &= \frac{2}{3} \pi r^3\end{aligned}$$

$$\therefore \text{गोलाचे घनफळ} = 2 \times \text{अर्धगोलाचे घनफळ}$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\therefore \text{गोलाचे घनफळ} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

सरावसंच 9.3

1. खाली दिलेल्या संख्या गोलांच्या त्रिज्या दर्शवतात.
(i) 4 सेमी (ii) 9 सेमी (iii) 3.5 सेमी
तर त्या गोलांची वक्रपृष्ठफळे व घनफळे शोधा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)
2. 5 सेमी त्रिज्या असणाऱ्या भरीव अर्धगोलाचे वक्रपृष्ठफळ व एकूण पृष्ठफळ काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)
3. 2826 सेमी² वक्रपृष्ठफळ असणाऱ्या गोलाचे घनफळ काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)
4. 38808 घसेमी घनफळ असणाऱ्या गोलाचे वक्रपृष्ठफळ काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$ घ्या.)
5. एका अर्धगोलाचे घनफळ 18000π घसेमी आहे, तर त्या गोलाचा व्यास काढा.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 9

1. 0.9 मी व्यास व 1.4 मी लांबी असणाऱ्या रोड रोलरच्या 500 फेऱ्यांमध्ये सपाट केलेल्या जमिनीचे क्षेत्रफळ किती ? ($\pi = \frac{22}{7}$)
2. एक इष्टिकाचिती आकाराचे घरगुती मत्स्यालय बनवण्यासाठी 2 मिमी जाडीची काच वापरली. मत्स्यालयाची (च्या भिंतींची) बाहेरून लांबी, रुंदी व उंची अनुक्रमे सेंटिमीटरमध्ये $60.4 \times 40.4 \times 40.2$ आहे, तर त्या मत्स्यालयात जास्तीत जास्त किती पाणी मावेल ?
3. एका शंकूच्या तळाची त्रिज्या व लंबउंची यांचे गुणोत्तर 5:12 आहे. शंकूचे घनफळ 314 घमी असल्यास त्याची लंबउंची व तिरकस उंची काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)
4. एका गोलाचे घनफळ 904.32 घसेमी आहे तर त्या गोलाची त्रिज्या काढा. ($\pi = 3.14$ घ्या.)
5. एका घनाचे एकूण पृष्ठफळ 864 चौसेमी आहे तर त्याचे घनफळ काढा.
6. ज्या गोलाचे पृष्ठफळ 154 चौसेमी आहे. अशा गोलाचे घनफळ काढा.
7. एका शंकूचे एकूण पृष्ठफळ 616 चौसेमी आहे. त्याची तिरकस उंची ही तळाच्या त्रिज्येच्या तिप्पट असल्यास तिरकस उंची काढा.
8. वर्तुळाकार विहिरीचा आतील व्यास 4.20 मीटर आहे. विहिरीची खोली 10 मीटर आहे. तर त्याचे आतील वक्रपृष्ठफळ किती ? विहिरीच्या आतील वक्रपृष्ठाला गिलावा करण्यासाठी प्रतिचौमी 52 रुपये दराने किती खर्च येईल ?
9. एका रोडरोलरची लांबी 2.1 मीटर असून त्याचा व्यास 1.4 मीटर आहे. एका मैदानाचे सपाटीकरण करताना रोलरचे 500 फेरे पूर्ण होतात, तर रोलरने किती चौमी मैदान सपाट होईल ? सपाटीकरणाचा दर प्रति चौमी 7 रुपये दराने किती खर्च येईल ?

